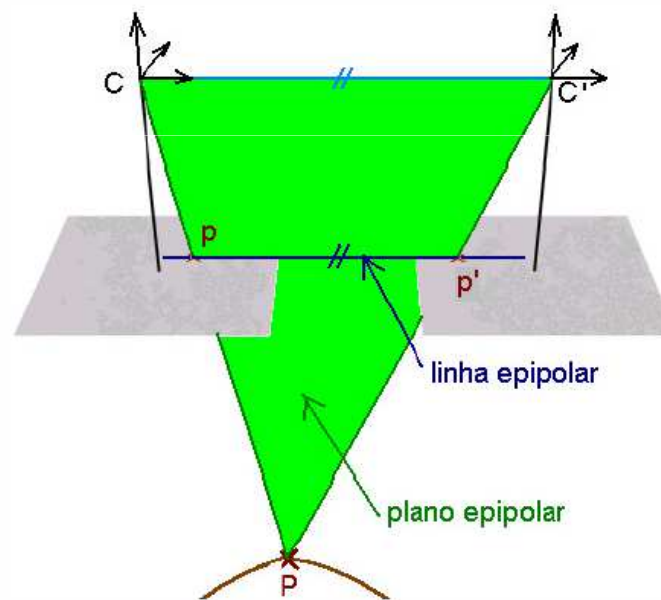
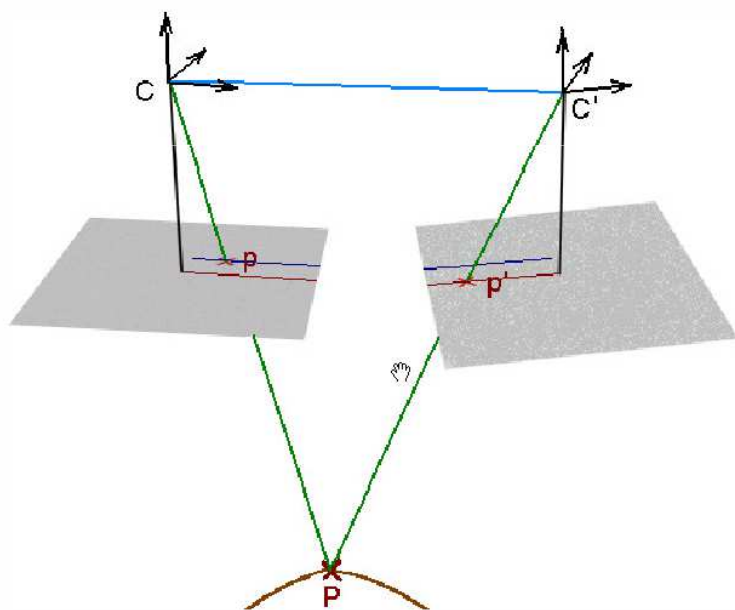


**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
SETOR DE CIÊNCIAS DA TERRA  
DEPARTAMENTO DE GEOMÁTICA**

**GEOMETRIA EPIPOLAR**

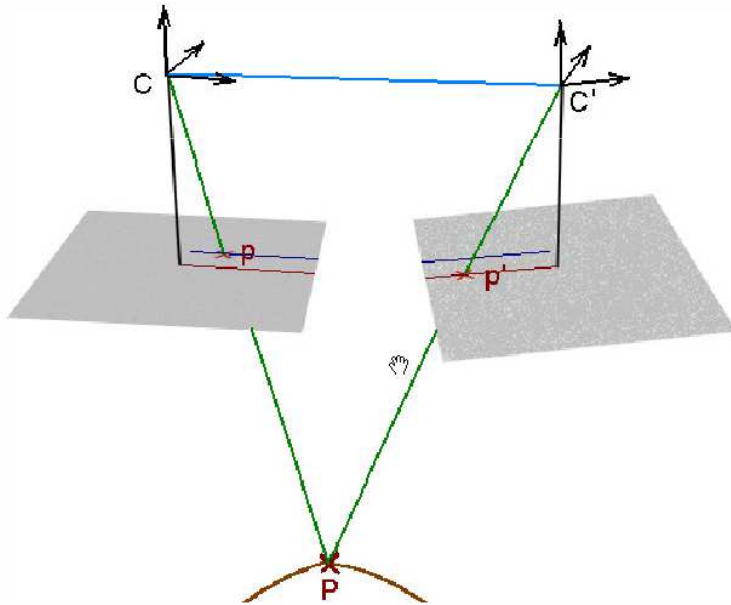
**Prof. Alvaro Muriel Lima Machado**

# Geometria epipolar



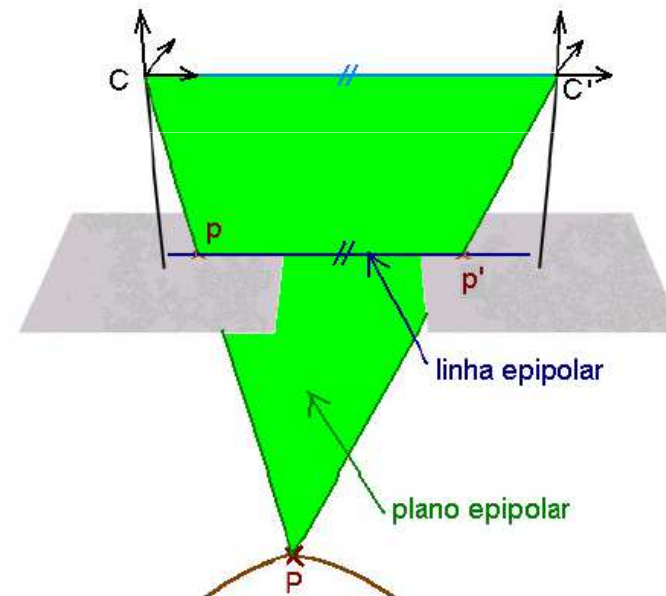
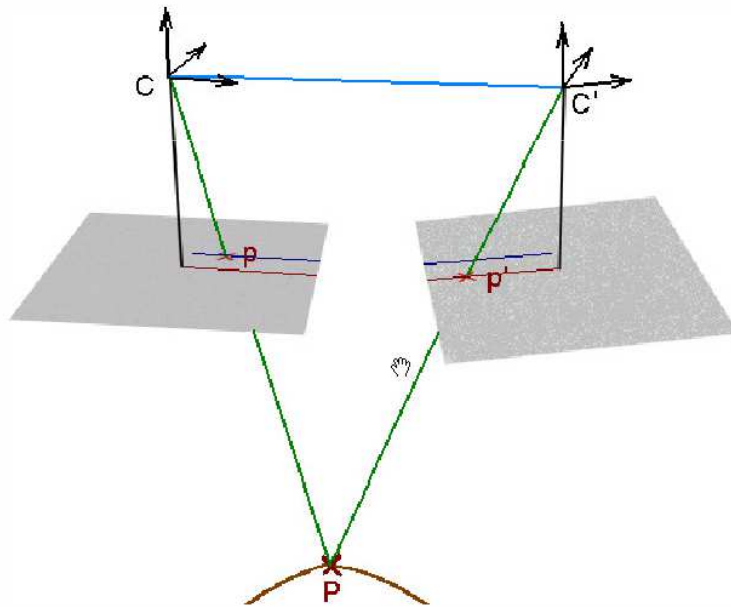
# Geometria epipolar

- **Segmento base:** interliga os dois centros de projeção  $C'$  e  $C''$ ;



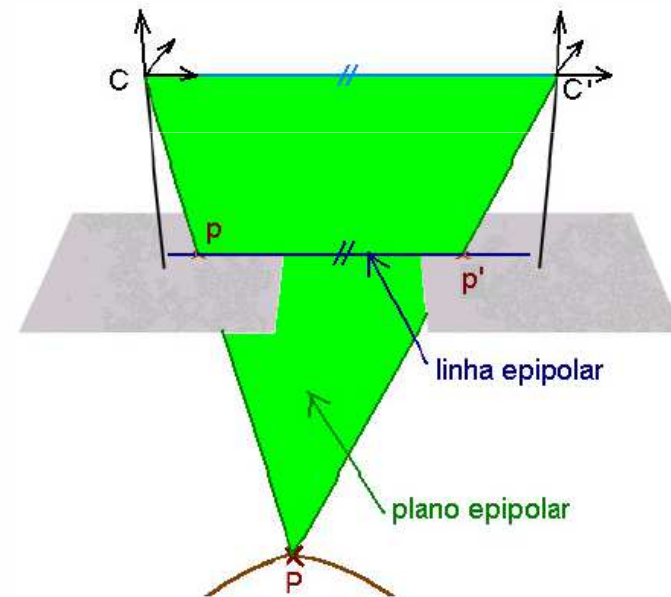
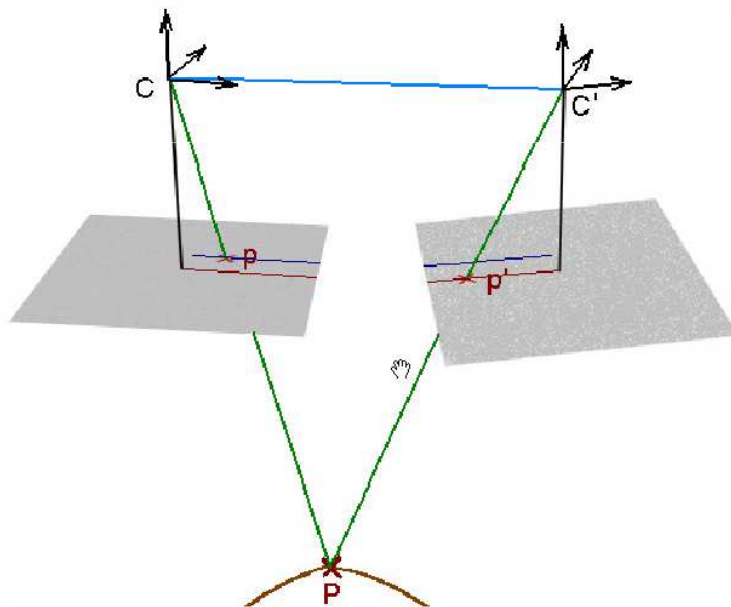
# Geometria epipolar

- **Plano epipolar:** todos os planos que contêm o segmento base;



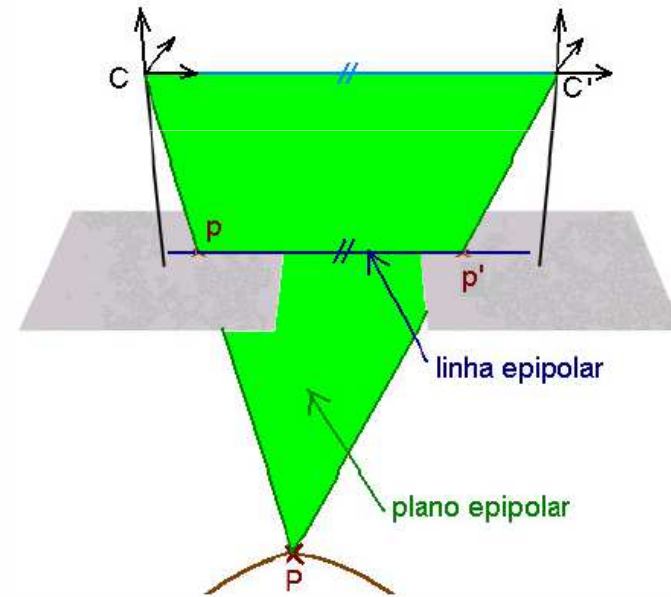
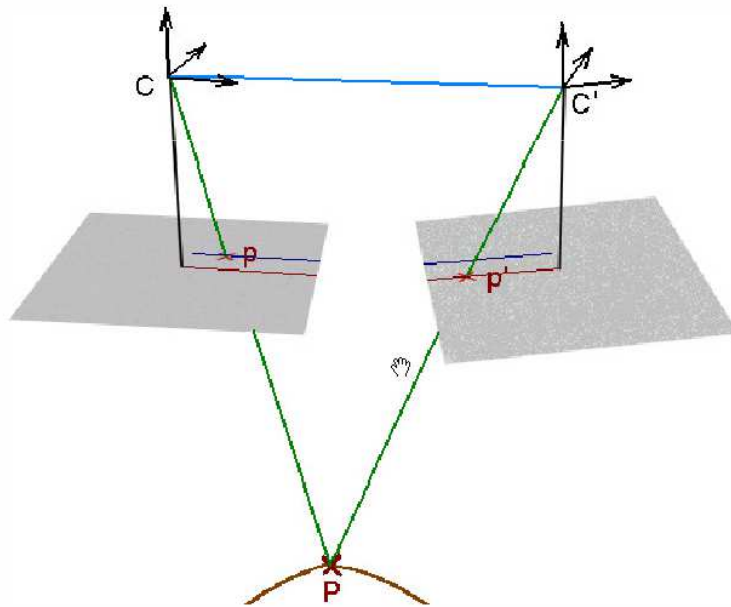
# Geometria epipolar

- **Linhas epipolares:** intersecções do plano epipolar com as imagens;



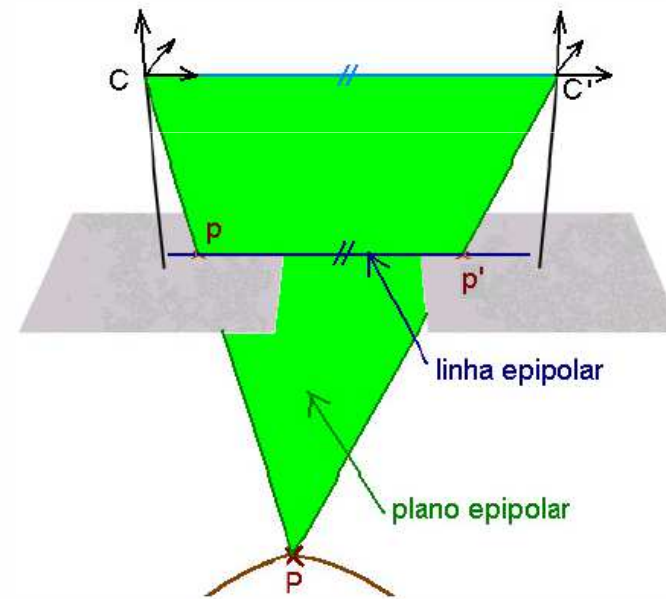
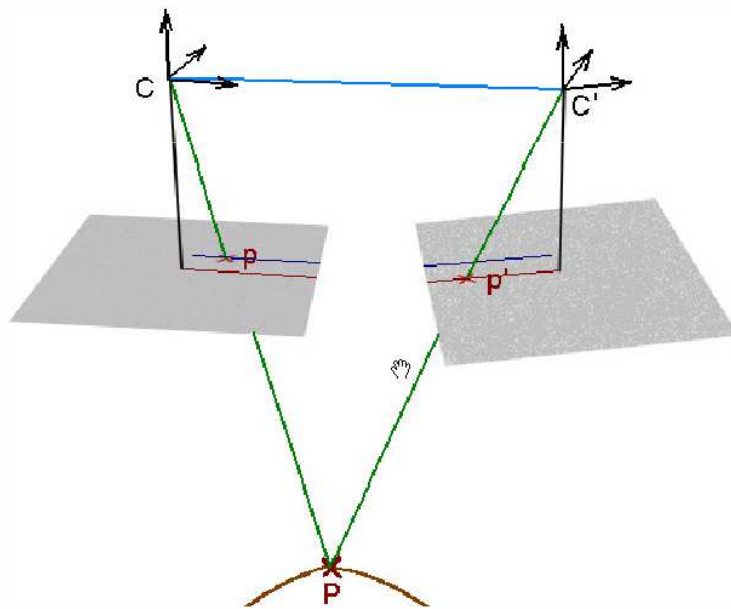
# Geometria epipolar

- **Epipolos:** intersecções da linha que passa pelos centros de projeção (base estendida) com os planos das imagens.



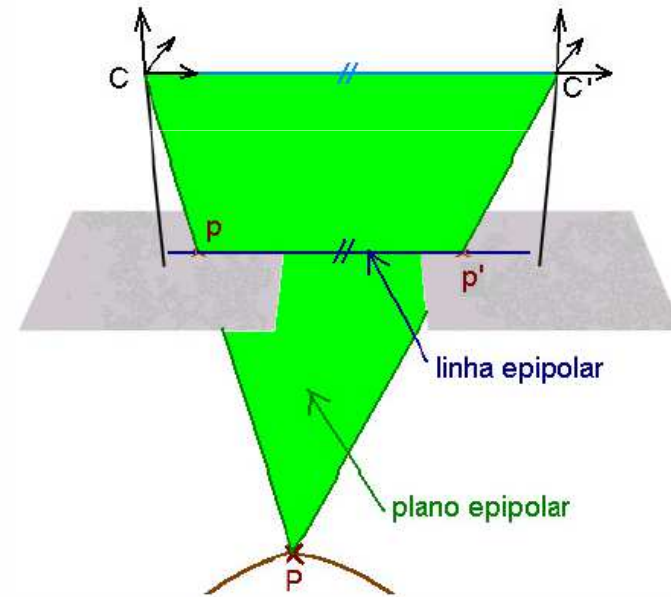
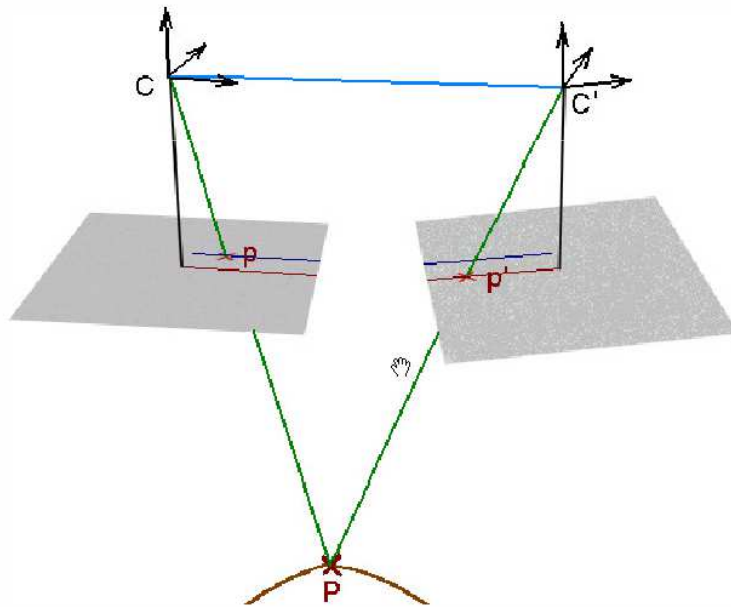
# Geometria epipolar

- Geralmente os epipolos não se encontram dentro dos limites físicos das imagens.

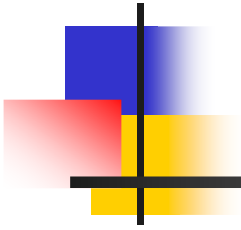


# Geometria epipolar

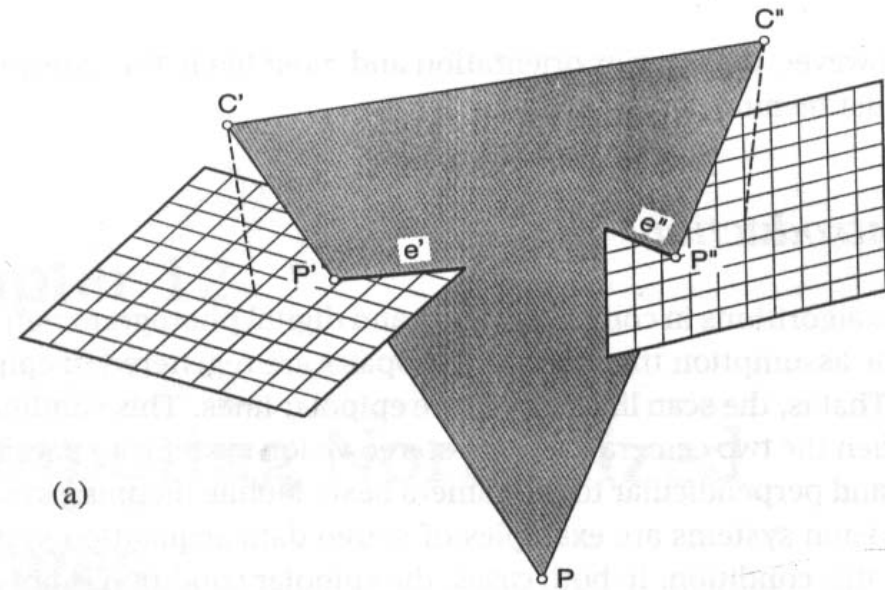
- Em imagens paralelas ao segmento base (normalizadas) os epipolos ficam no infinito.



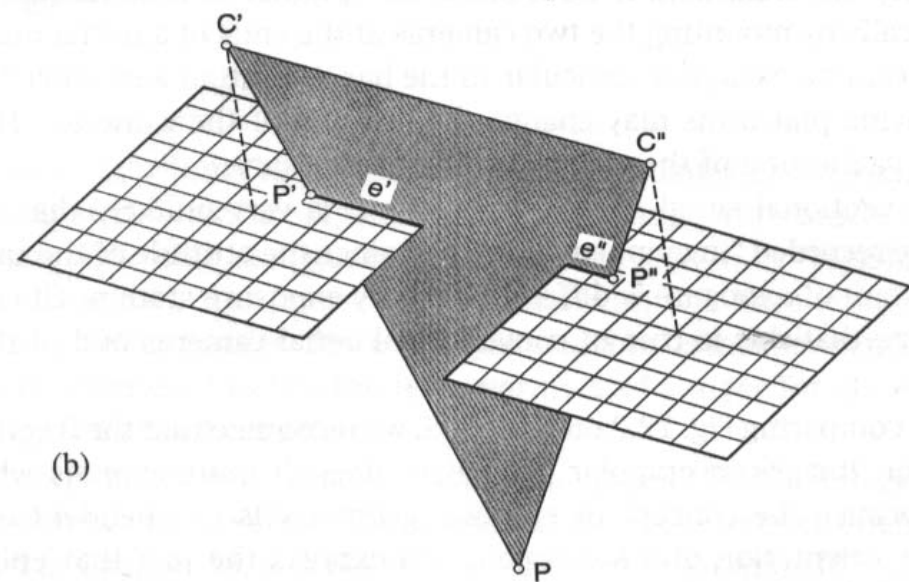




# Geometria epipolar



(a)



(b)

Fonte: Schenk, 1999



## Geometria epipolar

---

Muitos algoritmos de visão computacional e fotogrametria digital assumem que os pares de fotografias estejam dispostos de forma que suas feições conjugadas apareçam na mesma linha.

Esta configuração é freqüentemente referida como “registro em geometria epipolar”. Ela expressa o fato de que as linhas epipolares são relacionadas com as linhas das imagens.

Esta condição é satisfeita quando os eixos das câmaras de um sistema de visão estéreo são paralelos entre si e perpendiculares à base das câmaras.



## Geometria epipolar

---

O termo “imagens em geometria epipolar”, frequentemente usado, não expressa o seu significado porque o conceito de geometria epipolar é independente da orientação particular do estereopar.

Para expressar o fato de que linhas epipolares devem ser paralelas às linhas das imagens (confinando entidades conjugadas a uma mesma linha), Schenk (1999) recomenda a utilização do termo “imagens normalizadas”.



## Geometria epipolar

---

Imagens normalizadas simplificam o processo de pesquisa de pontos conjugados em um estereopar porque eles se encontram em uma mesma linha.

Isto representava uma enorme vantagem computacional no passado, mas considerando a sempre crescente capacidade de processamento, esta vantagem se torna menos significativa, muito embora ainda importante.

Para dificultar mais, as imagens normalizadas se relacionam com os estereopares; cada novo estereopar exige novas imagens normalizadas.



## Geometria epipolar

---

Para se obter imagens normalizadas, a partir de sua posição original, deve-se efetuar uma transformação tal que os eixos das câmaras se tornem perpendiculares ao segmento base.

Além disso, os eixos devem estar contidos em um plano que contenha o segmento base.

Pode-se imaginar facilmente o infinito número de posições normalizadas obtidas pela rotação do plano com os eixos das câmaras em torno do segmento base.



## Geometria epipolar: Normalização

---

### **Objetivo Geral:**

Facilitar a busca (automática) de feições homólogas em um estereopar (par de imagens consecutivas que apresentam sobreposição).

### **Objetivo Específico:**

Enquadrar uma mesma feição em linhas idênticas de duas imagens digitais.

### **Transformação de imagem original para normalizada**

O enfoque utilizado para o cálculo de imagens normalizadas exige que as orientações interior e exterior de um par de fotografias sejam conhecidas.

Com os parâmetros de orientação interior pode-se sempre mudar entre coordenadas de imagem (coluna e linha) e fotocoordenadas (mm).

A orientação exterior das imagens originais fornece três ângulos de rotação e as posições dos respectivos centros de projeção de ambas as imagens.

### **Transformação de imagem original para normalizada**

A transformação das imagens originais para imagens normalizadas pode ser pensada como consistindo em dois passos. Primeiro, as imagens são convertidas para sua verdadeira posição vertical, e daí para sua posição normalizada.

A primeira transformação, a partir da posição original para a vertical verdadeira, envolve simplesmente uma rotação com a matriz de rotação transposta  $\mathbf{R}^T$  da orientação exterior.

A seguir, a imagem é transformada de vertical verdadeira para sua posição normalizada. Isto envolve rotacionar a imagem vertical verdadeira em torno do segmento base. Assim, necessita-se da matriz de rotação da base, denotada por  $\mathbf{R}_b$ .





## Geometria epipolar: Normalização

---

A matriz de normalização é o produto de duas matrizes: a matriz de rotação da imagem original para a imagem vertical verdadeira, e a matriz de rotação da base.

$$R_N = R_b \cdot R^T$$

Como  $R^T$  é a transposta da matriz de rotação da orientação exterior, ela é diferente para cada imagem e deve ser determinada para ambas as imagens do estereopar.

# Geometria epipolar: Normalização

$$BX = X_C'' - X_C'$$

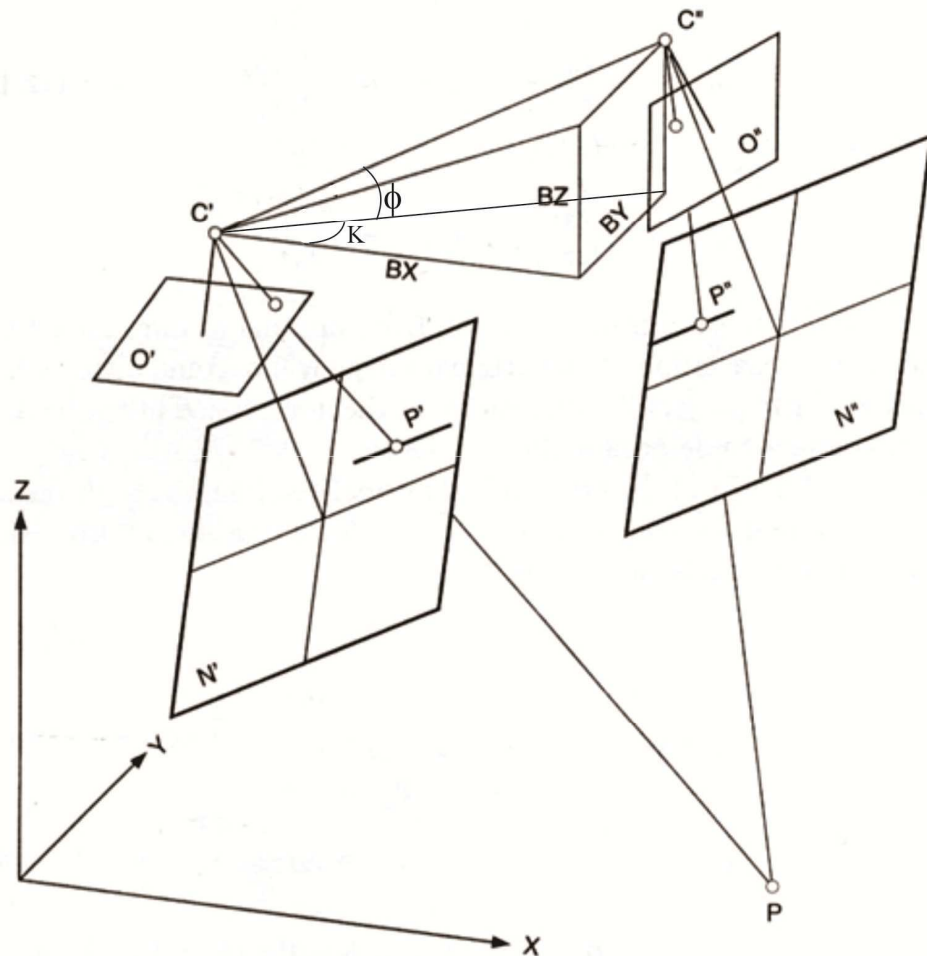
$$BY = Y_C'' - Y_C'$$

$$BZ = Z_C'' - Z_C'$$

$$\kappa = \arctan\left(\frac{BY}{BX}\right)$$

$$\phi = -\arctan\left(\frac{BZ}{\sqrt{BX^2 + BY^2}}\right)$$

$$\Omega = \frac{\omega' + \omega''}{2}$$



Fonte: Adaptado de Schenk, 1999



## Geometria epipolar: Normalização

**R**

$$M(\kappa, \varphi, \omega) = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cdot \cos \kappa & \cos \omega \cdot \text{sen} \kappa + \text{sen} \omega \cdot \text{sen} \varphi \cdot \cos \kappa & \text{sen} \omega \cdot \text{sen} \kappa - \cos \omega \cdot \text{sen} \varphi \cdot \cos \kappa \\ -\cos \varphi \cdot \text{sen} \kappa & \cos \omega \cdot \cos \kappa - \text{sen} \omega \cdot \text{sen} \varphi \cdot \text{sen} \kappa & \text{sen} \omega \cdot \cos \kappa + \cos \omega \cdot \text{sen} \varphi \cdot \text{sen} \kappa \\ \text{sen} \varphi & -\text{sen} \omega \cdot \cos \varphi & \cos \omega \cdot \cos \varphi \end{bmatrix}$$

**R com outra ordem de rotação**

$$M(\omega, \varphi, \kappa) = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cdot \cos \kappa & \cos \varphi \cdot \text{sen} \kappa & -\text{sen} \varphi \\ \text{sen} \omega \cdot \text{sen} \varphi \cdot \cos \kappa - \cos \omega \cdot \text{sen} \kappa & \text{sen} \omega \cdot \text{sen} \varphi \cdot \text{sen} \kappa + \cos \omega \cdot \cos \kappa & \text{sen} \omega \cdot \cos \varphi \\ \cos \omega \cdot \text{sen} \varphi \cdot \cos \kappa + \text{sen} \omega \cdot \text{sen} \kappa & \cos \omega \cdot \text{sen} \varphi \cdot \text{sen} \kappa - \text{sen} \omega \cdot \cos \kappa & \cos \omega \cdot \cos \varphi \end{bmatrix}$$

Segue-se que, para calcular  $\omega_E$  e  $\omega_D$  tem-se a alternativa:

$$\frac{M(\omega, \varphi, \kappa)_{23}}{M(\omega, \varphi, \kappa)_{33}} = \frac{\text{sen} \omega \cdot \cos \varphi}{\cos \omega \cdot \cos \varphi} = \text{tg} \omega \quad \rightarrow \quad \omega = \text{arctg} \left( \frac{M_{23}}{M_{33}} \right)$$

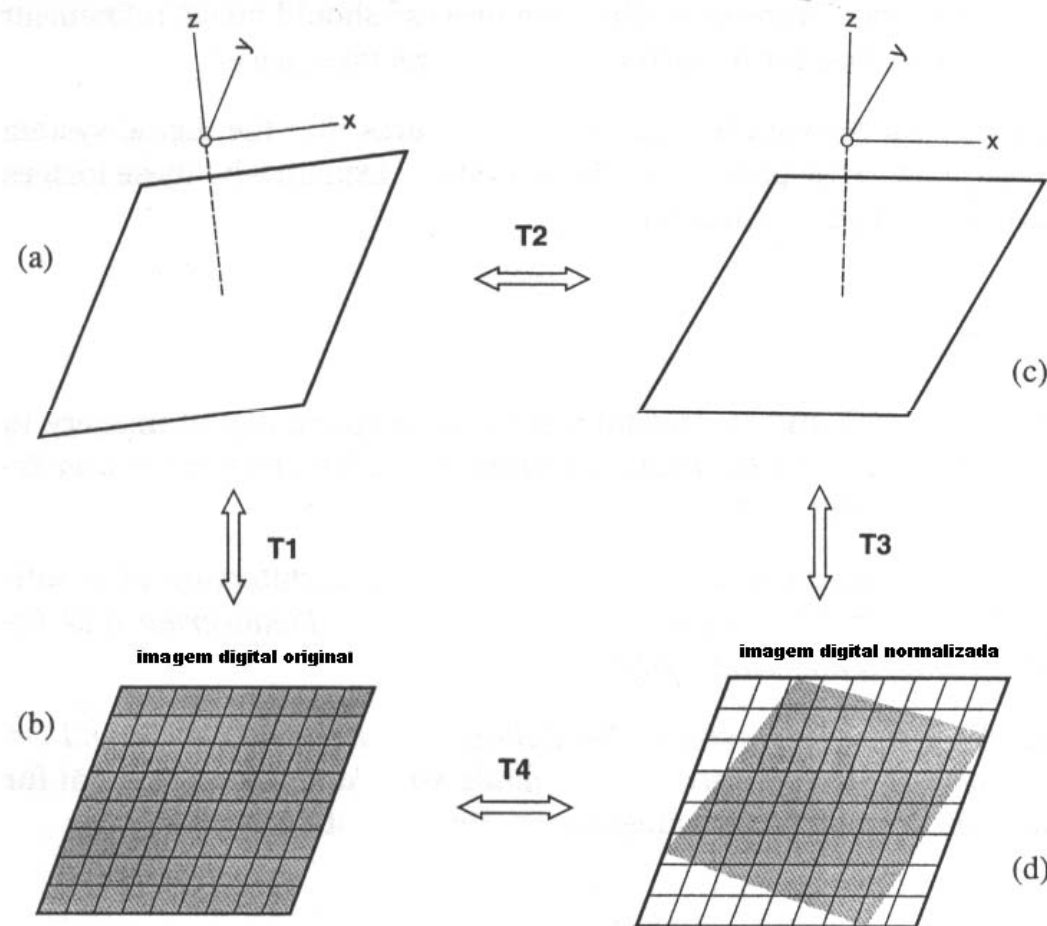
### **Transformação de imagem original para normalizada**

A rotação  $\Omega$  influencia a forma geométrica das imagens reamostradas para a geometria epipolar.

Sempre que se rotaciona imagens, a área abrangida se torna **MAIOR**.

A fim de otimizar a área útil do estereograma, adota-se o valor médio dos ângulos.

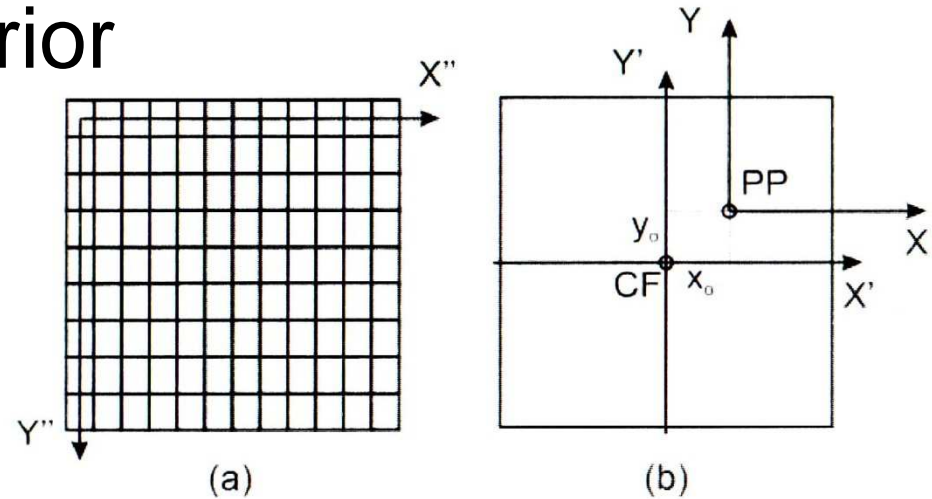
# Geometria epipolar: Normalização



Fonte: Schenk, 1999

## Geometria epipolar: Normalização

- T1 = Orientação Interior

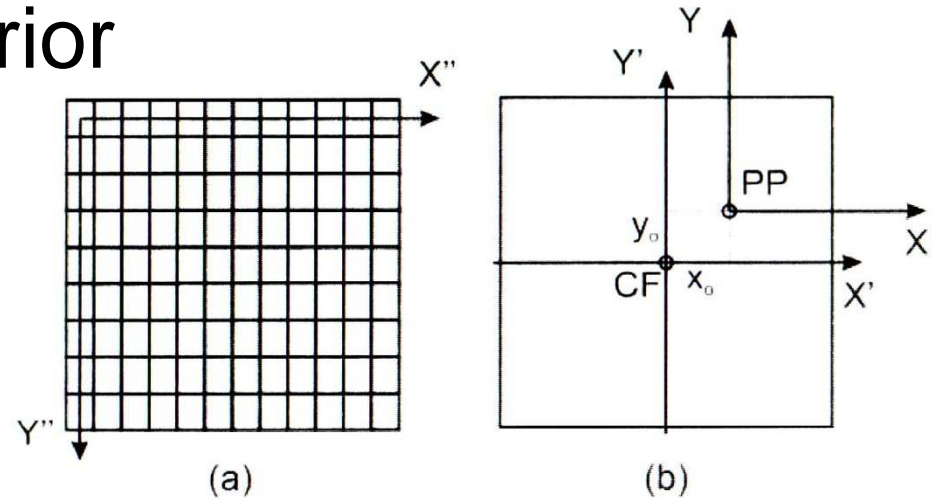


$$\text{Se origem CSE} = (0,0) \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x & 0 \\ 0 & -P_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{(N_C - 1) * P_x}{2} \\ \frac{(N_L - 1) * P_y}{2} \end{bmatrix}$$

$x$  e  $y$  são fotocoordenadas (em mm), e  $C$  e  $L$  são coordenadas de imagem;  
 $P_x$  e  $P_y$  representam o tamanho do pixel segundo os eixos  $X$  e  $Y$ , respectivamente;  
 $N_C$  e  $N_L$  representam a qtd total de colunas e linhas na imagem, respectivamente.

## Geometria epipolar: Normalização

- T1 = Orientação Interior

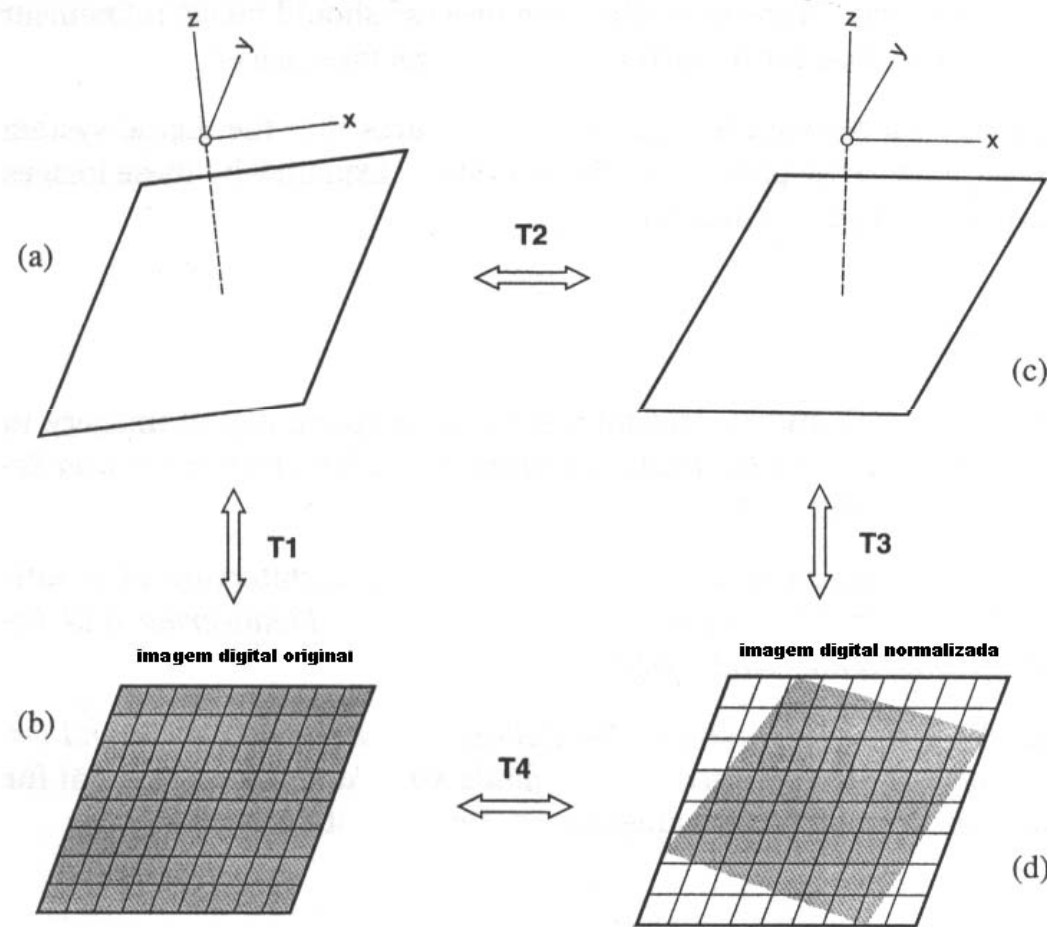


Se origem CSE = (1,1)  $\rightarrow$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x & 0 \\ 0 & -P_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{(N_C + 1) * P_x}{2} \\ \frac{(N_L + 1) * P_y}{2} \end{bmatrix}$$

$x$  e  $y$  são fotocoordenadas (em mm), e  $C$  e  $L$  são coordenadas de imagem;  
 $P_x$  e  $P_y$  representam o tamanho do pixel segundo os eixos  $X$  e  $Y$ , respectivamente;  
 $N_C$  e  $N_L$  representam a qtd total de colunas e linhas na imagem, respectivamente.

# Geometria epipolar: Normalização



Fonte: Schenk, 1999



- T2 = Transformação Colinear ou Projetiva

$$x_n = -f_n \cdot \frac{r_{11}x_0 + r_{12}y_0 - r_{13}f_0}{r_{31}x_0 + r_{32}y_0 - r_{33}f_0}$$

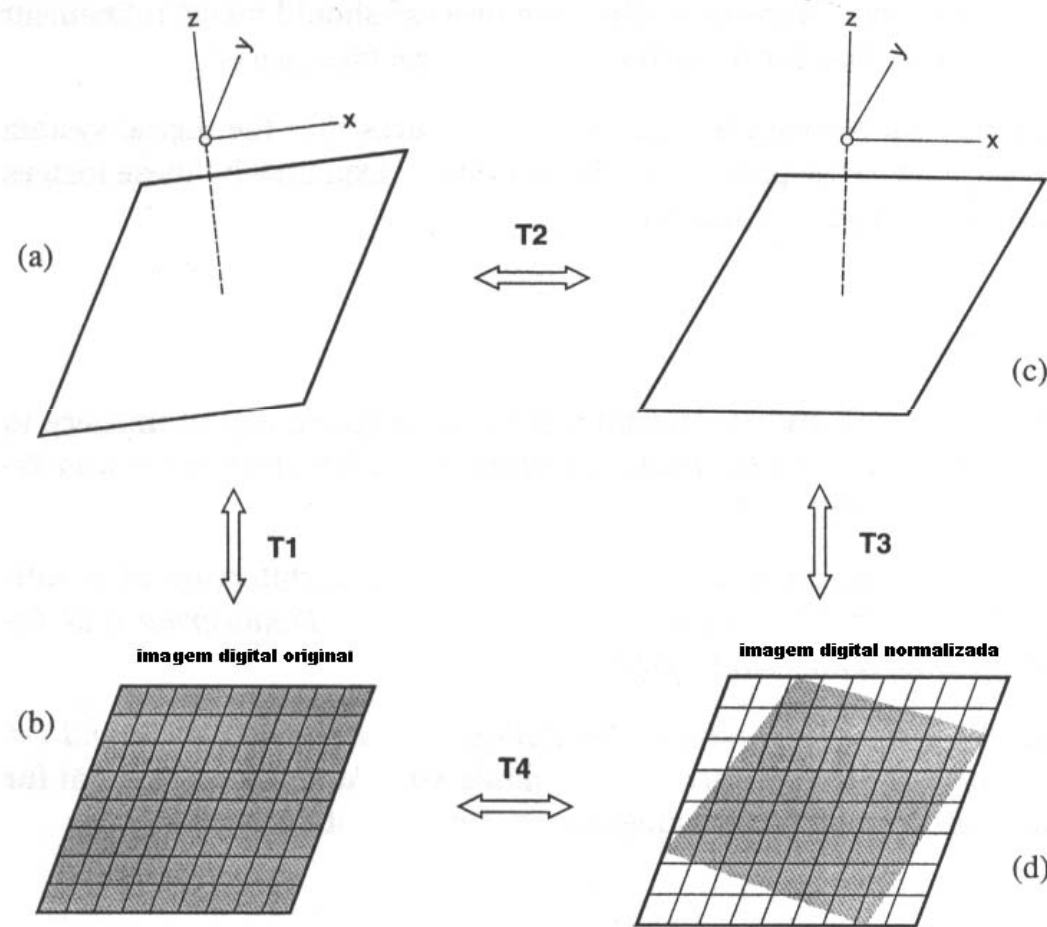
$$y_n = -f_n \cdot \frac{r_{21}x_0 + r_{22}y_0 - r_{23}f_0}{r_{31}x_0 + r_{32}y_0 - r_{33}f_0}$$

**com a seguinte função  
inversa  
(Kraus, 1992)**

$$x_0 = -f_0 \cdot \frac{r_{11}x_n + r_{21}y_n - r_{31}f_n}{r_{13}x_n + r_{23}y_n - r_{33}f_n}$$

$$y_0 = -f_0 \cdot \frac{r_{12}x_n + r_{22}y_n - r_{32}f_n}{r_{13}x_n + r_{23}y_n - r_{33}f_n}$$

# Geometria epipolar: Normalização



Fonte: Schenk, 1999



## Geometria epipolar: Normalização

---

### Resolução das imagens normalizadas

Sempre que se rotaciona imagens, a área abrangida se torna MAIOR.

- Preservação do Tamanho de pixel T

$$Q = \text{Dist} / T$$

- Preservação da Quantidade de pixels Q

$$T = \text{Dist} / Q$$

**As imagens normalizadas de um estereopar tem como característica:**

- **Mesmo tamanho de pixel;**
- **Mesma quantidade de linhas.**



# Geometria epipolar: Normalização

---

## Resolução das imagens normalizadas

1) A partir dos quatro cantos das imagens originais determinam-se os limites das fotocoordenadas no espaço das imagens normalizadas; quais sejam:

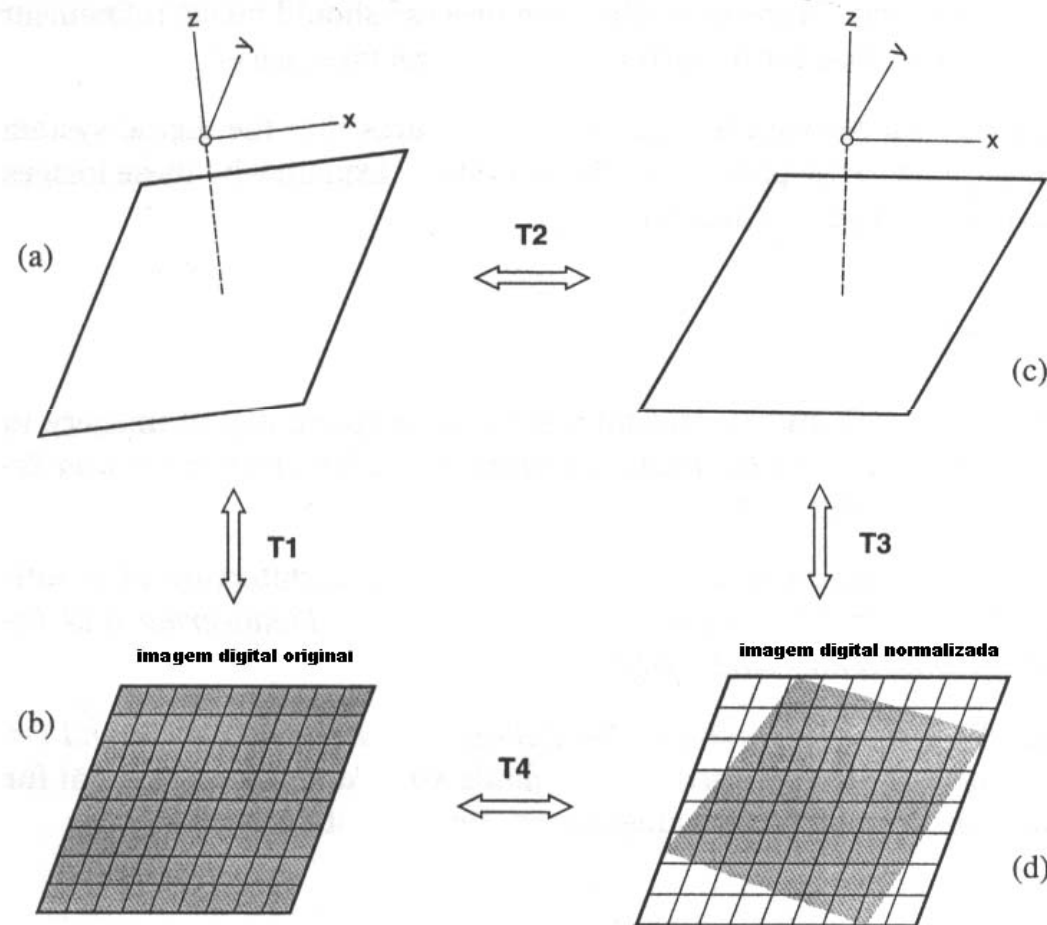
$x_{\min}^e, x_{\max}^e, y_{\min}^e, y_{\max}^e$  (imagem normalizada da esquerda)

$x_{\min}^d, x_{\max}^d, y_{\min}^d, y_{\max}^d$  (imagem normalizada da direita)

2) Os limites em  $y$  são empregados para a determinação da qtde de linhas e os limites em  $x$  para a determinação de colunas, usando-se a relação com o tamanho do pixel;

3) Define-se desta forma a origem e os tamanhos das imagens normalizadas.

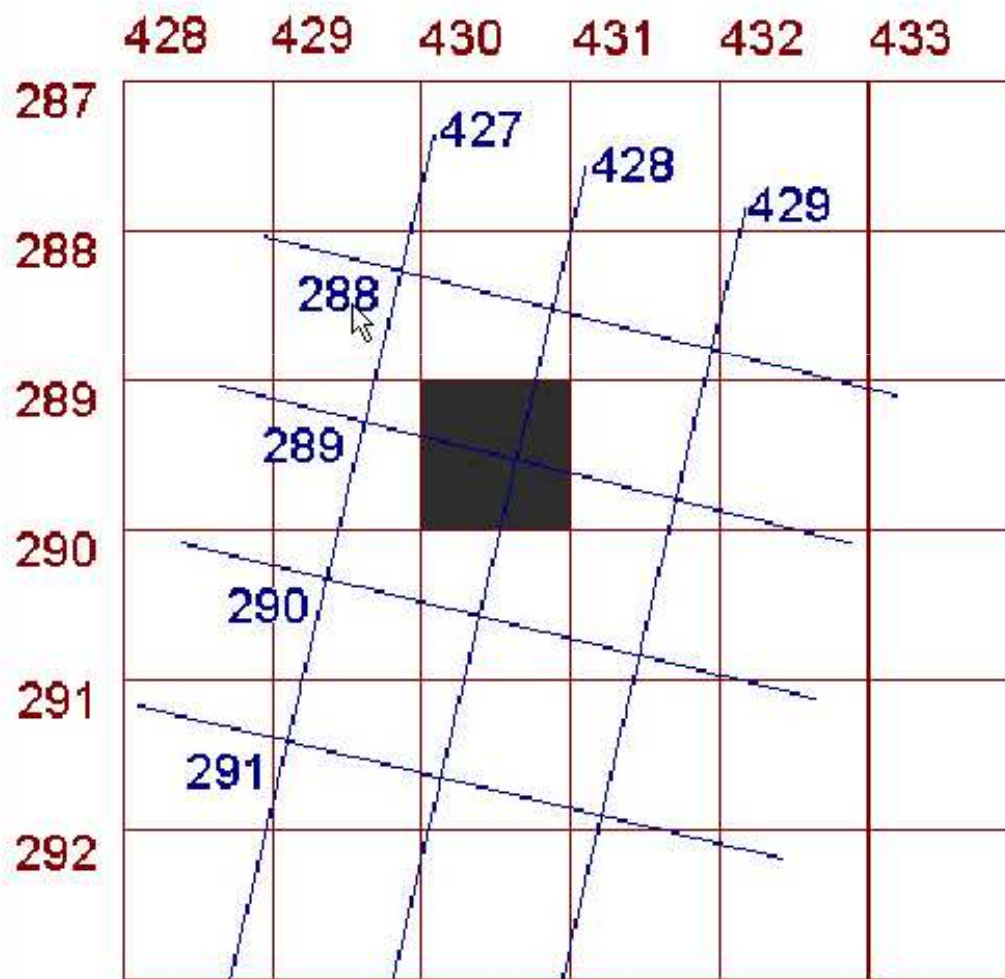
# Geometria epipolar: Normalização



Fonte: Schenk, 1999

## Geometria epipolar: Normalização

- T4 = Processo de reamostragem





## Geometria epipolar: Normalização

- T4 = Processo de reamostragem

Método de Reamostragem	Entorno de interpolações	Adições Multiplicações	Erros de Interpolação
Vizinho mais próximo	1x1	1	15,7%
Interpolação bilinear	2x2	8	3,7%
Splines bicúbicas	4x4	110	0,3%
Polinômio de Lagrange	4x4	80	Aprox. 0

**Fonte: ANDRADE, J. BITTENCOURT. Fotogrametria. SBEE. Curitiba, 1998.**

- T4 = Processo de reamostragem

Vizinho mais próximo

$$R(k,l) = A(i,j) \quad \text{para } dx < 0,5 \text{ e } dy < 0,5$$

$$R(k,l) = A(i+1,j) \quad \text{para } dx \geq 0,5 \text{ e } dy < 0,5$$

$$R(k,l) = A(i,j+1) \quad \text{para } dx < 0,5 \text{ e } dy \geq 0,5$$

$$R(k,l) = A(i+1,j+1) \quad \text{para } dx \geq 0,5 \text{ e } dy \geq 0,5$$

**Fonte: ANDRADE, J. BITTENCOURT. Fotogrametria. SBEE. Curitiba, 1998.**



- T4 = Processo de reamostragem

Interpolação bilinear

$$\begin{aligned} R(k,l) = & A(i,j) + \\ & + dx*(A(i+1,j) - A(i,j)) + \\ & + dy*(A(i,j+1) - A(i,j)) + \\ & + dx*dy*(A(i,j) - A(i+1,j) - A(i,j+1) + A(i+1,j+1)) \end{aligned}$$

**Fonte: ANDRADE, J. BITTENCOURT. Fotogrametria. SBEE. Curitiba, 1998.**

- T4 = Processo de reamostragem

Splines bicúbicas

$$df(x) = |x|^3 - 2|x|^2 + 1 \quad \text{para } |x| < 1$$

$$df(x) = -|x|^3 + 5|x|^2 - 8|x| + 4 \quad \text{para } 1 \leq |x| < 2$$

$$df(x) = 0 \quad \text{para } |x| \geq 2$$

$$\begin{aligned} a(n) = & A(i-1, j+n-2) * df(dx+1) + \\ & + A(i, j+n-2) * df(dx) + \\ & + A(i+1, j+n-2) * df(dx-1) + \\ & + A(i+2, j+n-2) * df(dx-2) \quad \text{para } n = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(k, l) = & a(1) * df(dy+1) + a(2) * df(dy) + \\ & + a(3) * df(dy-1) + a(4) * df(dy-2) \end{aligned}$$

- T4 = Processo de reamostragem

Polinômio de Lagrange

$$\begin{aligned} a(n) = & A(i-1, j+n-2) * (dx-1) * (dx-2) * dx / (-6) + \\ & + A(i, j+n-2) * (dx+1) * (dx-1) * (dx-2) / 2 + \\ & + A(i+1, j+n-2) * (dx+1) * (dx-2) * dx / (-2) + \\ & + A(i+2, j+n-2) * (dx+1) * (dx-1) * dx / 6 \quad \text{para } n = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(k, l) = & a(1) * (dy-1) * (dy-2) * dy / (-6) + \\ & + a(2) * (dy+1) * (dy-1) * (dy-2) / 2 + \\ & + a(3) * (dy+1) * (dy-2) * dy / (-2) + \\ & + a(4) * (dy+1) * (dy-1) * dy / 6 \end{aligned}$$

## REFERÊNCIAS

01. ANDRADE, J. BITTENCOURT. **Fotogrametria**. SBEE. Curitiba, 1998.
02. AUGUSTO, Eduardo G. G. **Normalização de Estereogramas e sua Aplicação na Geração de Modelos Numéricos de Elevações**. Rio de Janeiro, 1999. Dissertação (Mestrado em Ciências Cartográficas). Secretaria de Ciência e Tecnologia, Instituto Militar de Engenharia.
03. CHO, Woosug; SCHENK, Toni; MADANI, Mustafá. **Resampling Digital Imagery to Epipolar Geometry**. OSU, Columbus, 1992.
04. KRAUS, Karl. **Photogrammetry Volume 1 - Fundamentals and Standard Processes**. Verlag, Bonn, 1992.
05. LUGNANI, João Bosco. **Introdução à Fototriangulação**. Imprensa Universitária da UFPR, Curitiba, 1987.
06. MIKHAIL, E. M.; BETHEL, J. S.; MCGLONE, J. C. **Introduction to Modern Photogrammetry**. John Wiley & Sons, Inc. New York, 2001.
07. SCHENK, Toni. **Digital Photogrammetry Vol I**. TerraScience - Ohio, 1999.
08. STRAUCH, J. C. Mercedes. **Correlação de Imagens Digitais**. Curitiba, 1991. Dissertação (Mestrado em Geociências) - Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná.



# Geometria epipolar: Normalização

---