**Implementação de Geometria Epipolar: Normalização**

**Exemplo**
**(adaptado de MIKHAIL, E. M; BETHEL, J. S.; MCGLONE, J. C.**
**Introduction to Modern Photogrammetry. John Wiley & Sons, Inc. New York, 2001)**

Duas fotos apresentam os seguintes parâmetros de orientação exterior:

$(X_{0E},\ Y_{0E},\ Z_{0E})$ = (5000, 5000, 610)m

$(\omega_E, \varphi_E, \kappa_E)$ = (1.4145001, 1.414070, 44.982543) graus

$(X_{0D},\ Y_{0D},\ Z_{0D})$ = (5260, 5260, 630)m

$(\omega_D, \varphi_D, \kappa_D)$ = (-0.707143, -0.707089, 44.995636) graus

Os parâmetros da câmara são ($x_o$, $y_o$, c) = (0.0, 0.0, 152.4) mm.
Um ponto P no terreno tem coordenadas (X, Y, Z) = (5080.0, 5180.0, 50.0) m.
Calcule a transformação para normalizar cada uma das fotos.
Para verificar a correção dos procedimentos calcule as fotocoordenadas do ponto dado em cada uma das fotos, e transforme-as para o plano normalizado. Mostre que as duas ordenadas (fotocoordenadas y) normalizadas calculadas são idênticas.

Para a foto da esquerda tem-se:

$$M_E = M_Z(\kappa_E).M_Y(\varphi_E).M_X(\omega_E) = M(\kappa_E, \varphi_E, \omega_E)$$

$\omega_E$ = 1.4145001*PI/180 = 0.024688rad

$\varphi_E$ = 1.414070*PI/180 = 0.024680rad

$\kappa_E$ = 44.982543*PI/180 = 0.785093rad

Sabe-se que:

$$M(\kappa,\varphi,\omega) = \begin{bmatrix} \cos\varphi.\cos\kappa & \cos\omega.sen\kappa + sen\omega.sen\varphi.\cos\kappa & sen\omega.sen\kappa - \cos\omega.sen\varphi.\cos\kappa \\ -\cos\varphi.sen\kappa & \cos\omega.\cos\kappa - sen\omega.sen\varphi.sen\kappa & sen\omega.\cos\kappa + \cos\omega.sen\varphi.sen\kappa \\ sen\varphi & -sen\omega.\cos\varphi & \cos\omega.\cos\varphi \end{bmatrix}$$

donde:

$$M_E = \begin{bmatrix} 0.707107 & 0.707107 & 0.000000 \\ -0.706676 & 0.706676 & 0.034899 \\ 0.024678 & -0.024678 & 0.999391 \end{bmatrix}$$

Para a foto da direita tem-se:

$$M_D = M_Z(\kappa_D).M_Y(\varphi_D).M_X(\omega_D) = M(\kappa_D, \varphi_D, \omega_D)$$

$\omega_D$ = -0.707143*PI/180 = -0.012342rad

$\varphi_D$ = -0.707089*PI/180 = -0.012341rad

$\kappa_D$ = 44.995636*PI/180 = 0.785322rad

donde:

$$M_D = \begin{bmatrix} 0.707107 & 0.707107 & 0.000000 \\ -0.706999 & 0.706999 & -0.017452 \\ -0.012341 & 0.012341 & 0.999848 \end{bmatrix}$$

As diferenças entre os centros de perspectiva fornecem as características da linha de base:

$$B = \begin{bmatrix} B_X \\ B_Y \\ B_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{0D} - X_{0E} \\ Y_{0D} - Y_{0E} \\ Z_{0D} - Z_{0E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5260 - 5000 \\ 5260 - 5000 \\ 630 - 610 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 260 \\ 260 \\ 20 \end{bmatrix}$$

A seguir, extraem-se os ângulos $\omega_E$ e $\omega_D$, a partir das duas matrizes de rotação $M_E$ e $M_D$ calculadas, assumindo-se que a ordem de rotação seja $M_Z(\kappa)$ (primária), $M_Y(\varphi)$ (secundária), e $M_X(\omega)$ (terciária). A matriz de rotação para esta seqüência de rotação é dada por:

$$M = M_X(\omega).M_Y(\varphi).M_Z(\kappa) = M(\omega,\varphi,\kappa)$$

$$M(\omega,\varphi,\kappa) = \begin{bmatrix} \cos\varphi.\cos\kappa & \cos\varphi.sen\kappa & -sen\varphi \\ sen\omega.sen\varphi.\cos\kappa - \cos\omega.sen\kappa & sen\omega.sen\varphi.sen\kappa + \cos\omega.\cos\kappa & sen\omega.\cos\varphi \\ \cos\omega.sen\varphi.\cos\kappa + sen\omega.sen\kappa & \cos\omega.sen\varphi.sen\kappa - sen\omega.\cos\kappa & \cos\omega.\cos\varphi \end{bmatrix}$$

Segue-se que, para calcular $\omega_E$ e $\omega_D$, tem-se a alternativa:

$$\frac{M(\omega,\varphi,\kappa)_{23}}{M(\omega,\varphi,\kappa)_{33}} = \frac{sen\omega.\cos\varphi}{\cos\omega.\cos\varphi} = tg\omega \text{ ou } \omega = arctg\left(\frac{M_{23}}{M_{33}}\right)$$

Desta forma tem-se:

$$\omega_{BE} = arctg\left(\frac{0.034899}{0.999391}\right) = 0.034907\text{rad} = 2.000000 \text{ graus}$$

$$\omega_{BD} = arctg\left(\frac{-0.017452}{0.999848}\right) = -0.017453\text{rad} = -1.000000 \text{ graus}$$

A seguir, obtêm-se os ângulos de rotação em torno da linha de base:

$$\kappa_B = arctg\left(\frac{B_Y}{B_X}\right) = arctg\left(\frac{260}{260}\right) = 45 \text{ graus}$$

$$\varphi_B = arctg\left(\frac{-B_Z}{\sqrt{B_X^2 + B_Y^2}}\right) = arctg\left(\frac{-20}{\sqrt{260^2 + 260^2}}\right) = -3.113412 \text{ graus}$$

$$\omega_B = \frac{\omega_{BE} + \omega_{BD}}{2} = 0.500000 \text{ graus}$$

Esta última matriz pode ser calculada:

$$M_B = M_X(\omega_B).M_Y(\varphi_B).M_Z(\kappa_B) = M(\omega_B,\varphi_B,\kappa_B)$$

$$M_B = \begin{bmatrix} 0.706063 & 0.706063 & 0.054313 \\ -0.707415 & 0.706745 & 0.008714 \\ -0.032233 & -0.044574 & 0.998486 \end{bmatrix}$$

As matrizes de normalização podem ser calculadas:

$$M_{NE} = M_B . M_E^T = \begin{bmatrix} 0.998524 & 0.001895 & 0.054279 \\ -0.000474 & 0.999657 & -0.026190 \\ -0.054310 & 0.026125 & 0.998182 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$M_{ND} = M_B . M_D^T = \begin{bmatrix} 0.998524 & -0.000948 & 0.054304 \\ -0.000474 & 0.999658 & 0.026164 \\ -0.054310 & -0.026151 & 0.998182 \end{bmatrix} \quad (2)$$

As fotocoordenadas, referentes ao ponto P no terreno, podem ser calculadas via condição de colinearidade (ponto P no terreno, centro de perspectiva e ponto na imagem), tanto na imagem da esquerda quanto na direita:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ -c \end{bmatrix} = \lambda . M . \begin{bmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x = -c \frac{m_{11}(X - X_0) + m_{12}(Y - Y_0) + m_{13}(Z - Z_0)}{m_{31}(X - X_0) + m_{32}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}}$$

$$\boldsymbol{y = -c \frac{m_{21}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{23}(Z - Z_0)}{m_{31}(X - X_0) + m_{32}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}}$$

$$\boldsymbol{x_E = -c \frac{m_{E11}(X - X_{0E}) + m_{E12}(Y - Y_{0E}) + m_{E13}(Z - Z_{0E})}{m_{E31}(X - X_{0E}) + m_{E32}(Y - Y_{0E}) + m_{E33}(Z - Z_{0E})}} = 49.843573$$

$$\boldsymbol{y_E = -c \frac{m_{E21}(X - X_{0E}) + m_{E22}(Y - Y_{0E}) + m_{E23}(Z - Z_{0E})}{m_{E31}(X - X_{0E}) + m_{E32}(Y - Y_{0E}) + m_{E33}(Z - Z_{0E})}} = 13.860366$$

$$\boldsymbol{x_D = -c \frac{m_{D11}(X - X_{0D}) + m_{D12}(Y - Y_{0D}) + m_{D13}(Z - Z_{0D})}{m_{D31}(X - X_{0D}) + m_{D32}(Y - Y_{0D}) + m_{D33}(Z - Z_{0D})}} = -48.417978$$

$$\boldsymbol{y_D = -c \frac{m_{D21}(X - X_{0D}) + m_{D22}(Y - Y_{0D}) + m_{D23}(Z - Z_{0D})}{m_{D31}(X - X_{0D}) + m_{D32}(Y - Y_{0D}) + m_{D33}(Z - Z_{0D})}} = 21.285288$$

As coordenadas na imagem original são transformadas para a imagem normalizada equivalente:

$$x_N = -c\frac{m_{N11}.x + m_{N12}.y - m_{N13}.c}{m_{N31}.x + m_{N32}.y - m_{N33}.c} \tag{3}$$

$$y_N = -c\frac{m_{N21}.x + m_{N22}.y - m_{N23}.c}{m_{N31}.x + m_{N32}.y - m_{N33}.c} \tag{4}$$

$$x_{NE} = -c\frac{m_{NE11}.x + m_{NE12}.y - m_{NE13}.c}{m_{NE31}.x + m_{NE32}.y - m_{NE33}.c} = 40.968192$$

$$y_{NE} = -c\frac{m_{NE21}.x + m_{NE22}.y - m_{NE23}.c}{m_{NE31}.x + m_{NE32}.y - m_{NE33}.c} = 17.584710$$

$$x_{ND} = -c\frac{m_{ND11}.x + m_{ND12}.y - m_{ND13}.c}{m_{ND31}.x + m_{ND32}.y - m_{ND33}.c} = -57.529802$$

$$y_{ND} = -c\frac{m_{ND21}.x + m_{ND22}.y - m_{ND23}.c}{m_{ND31}.x + m_{ND32}.y - m_{ND33}.c} = 17.584710$$

Como se pode verificar, as ordenadas normalizadas são idênticas ($y_{NE} = y_{ND}$), conforme desejado.

## Geração da imagem normalizada

Para o caso de se desejar realizar a normalização de uma imagem, torna-se necessário implementar as funções inversas das últimas equações. Esta prática é normal em processamento digital de imagens, visto que a criação de uma imagem não deve conter "vazios" dentro de si, fato que pode ocorrer devido a arredondamentos intrínsecos ao cálculo (o que inclui o processo de reamostragem).

A geração de uma imagem normalizada deve passar, a priori, pela determinação dos quatro cantos da imagem (vindo da imagem original para a imagem normalizada). Este procedimento estabelece o domínio da imagem normalizada. A seguir, usando-se o tamanho do pixel (usualmente da mesma ordem que o original) ou o tamanho da imagem (quantidade de pixels), define-se totalmente as características da imagem normalizada resultante.

Em continuidade, percorre-se toda a imagem normalizada (pixel por pixel) e, usando-se as equações invertidas abaixo, busca-se na imagem original a cor específica de cada pixel.

Apresenta-se, a seguir, as equações que determinam, a partir do espaço normalizado (em mm), quais as coordenadas (em mm) na imagem original (a busca da cor é realizada com a transformação para coordenadas de pixel). Observe-se que as matrizes de normalização, nas equações (5) e (6), são as transpostas do caso anterior (equações (3) e (4)).

$$x = -c\,\frac{m_{N11}.x_N + m_{N21}.y_N - m_{N31}.c}{m_{N13}.x_N + m_{N23}.y_N - m_{N33}.c} \tag{5}$$

$$y = -c\,\frac{m_{N12}.x_N + m_{N22}.y_N - m_{N32}.c}{m_{N13}.x_N + m_{N23}.y_N - m_{N33}.c} \tag{6}$$

Como exemplo, aplicando-se as equações (5) e (6) acima a $x_{NE}$ e $y_{NE}$, usando-se a matriz de normalização da imagem esquerda, obtém-se os valores 49,843573 e 13,860366 para $x_E$ e $y_E$ respectivamente da imagem original, idênticos aos gerados anteriormente.

Todos os cálculos acima foram apresentados como exemplo completo (inclui equações e resultados de cálculo) visando eventual conferência de equacionamento.

## RESUMO (PROCESSO DE NORMALIZAÇÃO DE IMAGENS)

1) Deve-se calcular as matrizes de normalização das imagens esquerda e direita (equivalentes às obtidas nas equações (1) e (2)). Para isto precisa-se dos parâmetros de orientação exterior (absolutos ou relativos);

2) Para se determinar o domínio (faixa de valores possíveis) de $x$ e $y$, nas imagens normalizadas, percorre-se os quatro cantos de cada imagem original (esquerda e direita), isto é, pontos com coordenadas de pixel (1,1), (1,*ncol*), (*nlin*,*ncol*) e (*nlin*,1). Para se usar as equações (3) e (4) deve-se, preliminarmente, converter coordenadas de pixel ($C$, $L$) para fotocoordenadas ($x$, $y$) (em mm), segundo equações (7), onde *nlin* e *ncol* representam a resolução espacial da imagem original e *px* e *py* representam os tamanhos dos pixels segundo os eixos $x$ e $y$:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} px & 0 \\ 0 & -py \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} C \\ L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(ncol+1)*px/2 \\ (nlin+1)*py/2 \end{bmatrix} \qquad (7)$$

3) Com as equações (3) e (4) obtém-se os domínios de $x$ e $y$, nas imagens normalizadas; um domínio para cada eixo e para cada imagem (esquerda ou direita);

4) Imagens normalizadas se caracterizam pelo fato de que pontos homólogos possuem ordenadas de pixel idênticas, isto é, mesmas identificações de linhas. Segue-se que ambas as imagens normalizadas devem ter: mesmo domínio e mesmo tamanho de pixel, o que implica em quantidade igual de linhas. Para se conseguir isto atribui-se à primeira linha de cada imagem normalizada a mesma fotoordenada (em mm), isto é, o maior valor nos domínios de $y$ (pode ser de qualquer uma das imagens normalizadas esquerda ou direita). Esta regra também vale para a última linha normalizada, isto é, tanto faz atribuir-se o menor valor de ordenada de qualquer uma das duas imagens. O importante é que as duas imagens normalizadas tenham o mesmo domínio (que abranja toda a parte comum das duas imagens);

5) Tendo-se o domínio normalizado de $y$ pode-se estipular (uma das duas alternativas):
   a) Tamanho do pixel normalizado (*pxn*): determina-se a quantidade de linhas;
   b) Quantidade de linhas: determina-se o tamanho do pixel (*pxn*);

6) Com as informações de menor/maior abscissa de cada imagem normalizada, e o tamanho do pixel (para ficar quadrado), determina-se a quantidade de colunas de cada imagem normalizada. Neste momento tem-se o tamanho de cada uma das duas imagens normalizadas;

7) Para se gerar a imagem normalizada, deve-se percorrer todos os pixels de cada uma das duas imagens normalizadas. Para se usar as equações (5) e (6) precisa-se converter coordenadas de pixel (*Ln*, *Cn*) para coordenadas de imagem (*xn*, *yn*);

$$\begin{cases} xn = x_{\min} + (Cn - 1) * pxn \\ yn = y_{\max} - (Ln - 1) * pxn \end{cases} \tag{8}$$

8) Com as equações (5) e (6) retorna-se ao domínio das imagens originais, obtendo-se fotocoordenadas (em mm);

9) Usando-se a inversa da equação (7) obtem-se as coordenadas de pixel (*L*, *C*) (equação (9)). Estas coordenadas (não são valores inteiros) devem ser usadas na reamostragem: vizinho mais próximo, interpolação bilinear, splines bicúbicas, polinômio de Lagrange). Neste trabalho prático devemos usar a interpolação bilinear para se obter a cor do pixel a ser colocado na imagem normalizada que está sendo gerada. Isto significa que a cor do pixel vai ser calculada usando-se as cores de quatro pixels vizinhos (2x2).

$$\begin{bmatrix} C \\ L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/px & 0 \\ 0 & -1/py \end{bmatrix} * \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -(ncol+1) * px/2 \\ (nlin+1) * py/2 \end{bmatrix} \right) \tag{9}$$