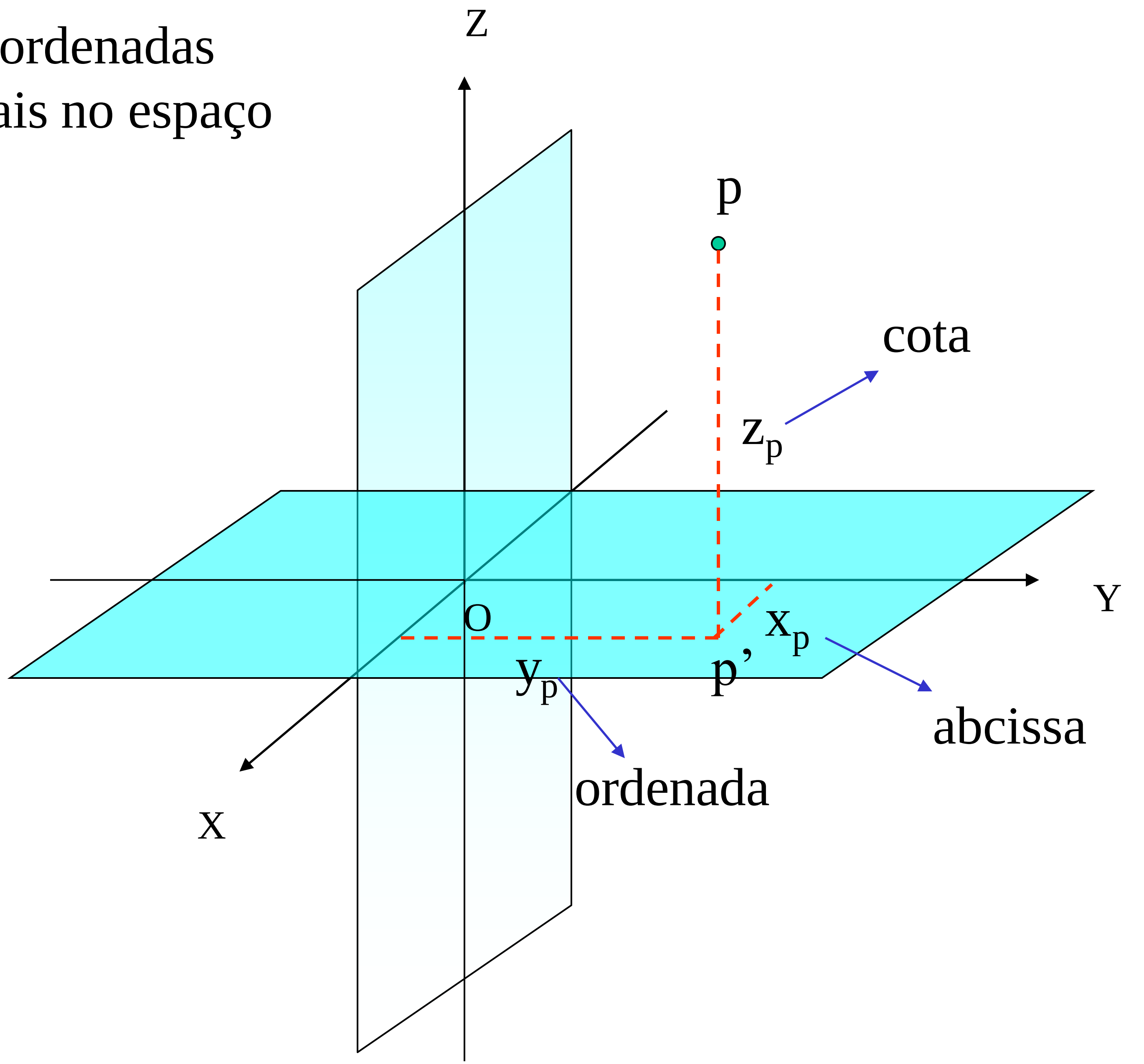
Sistemas de coordenadas tridimensionais

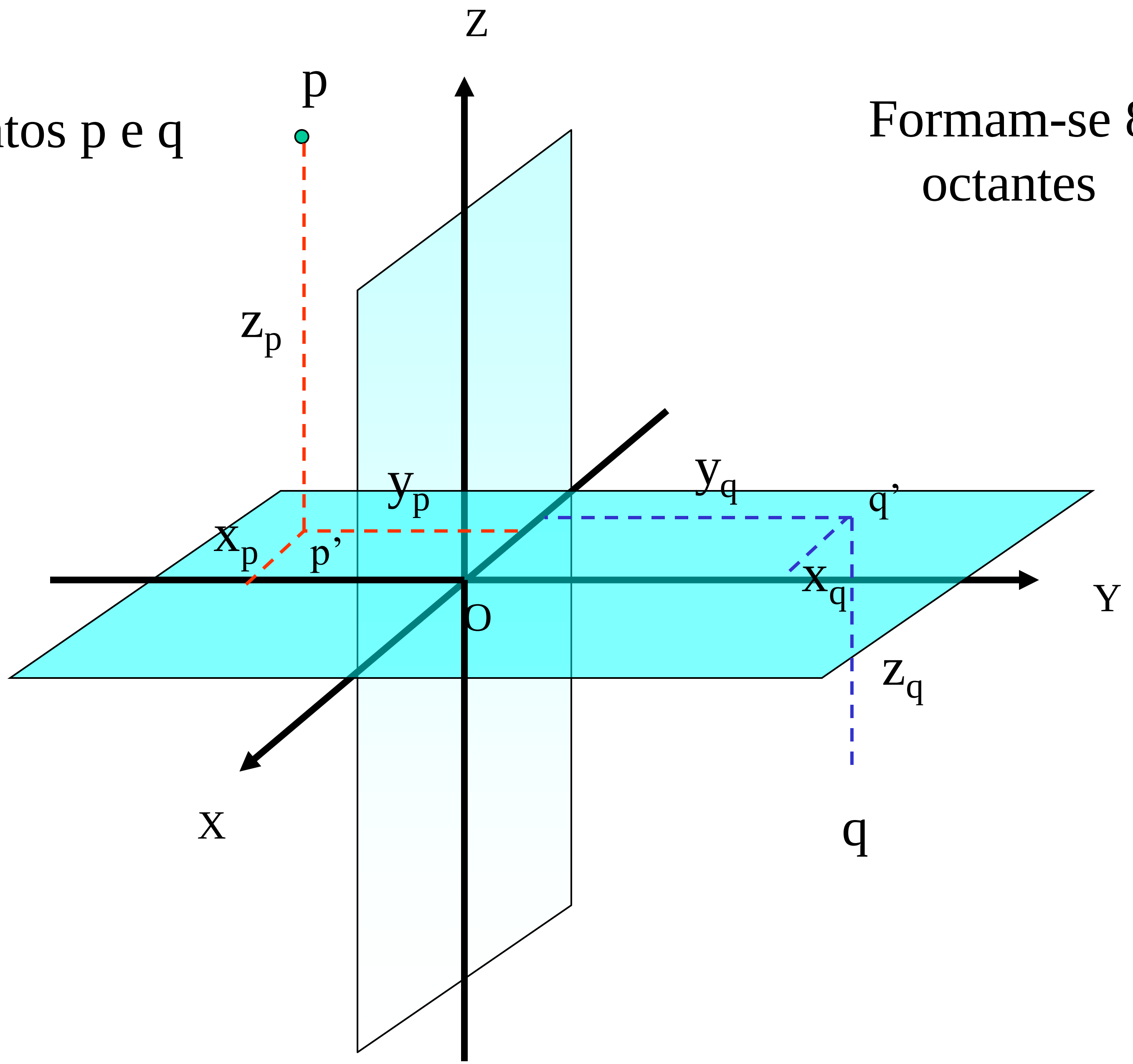
- Prof. Dr. Carlos Aurélio Nadal

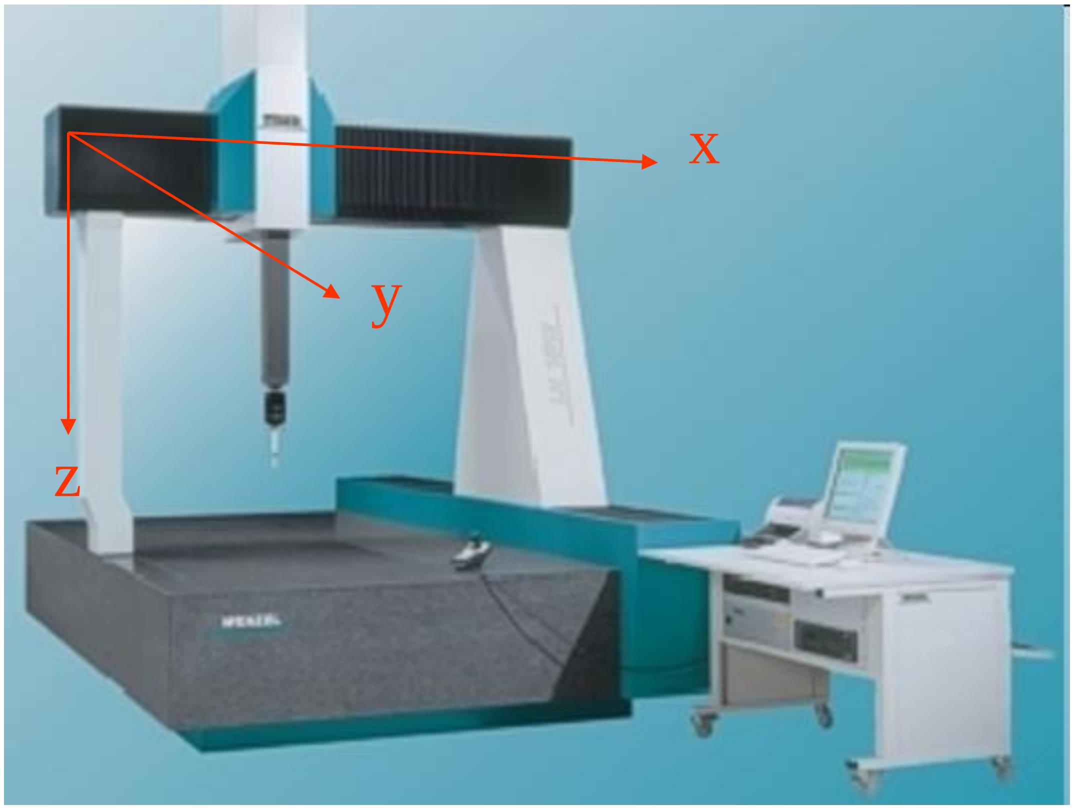
Sistema de coordenadas Tridimensionais no espaço



Posicionamento espacial dos pontos p e q

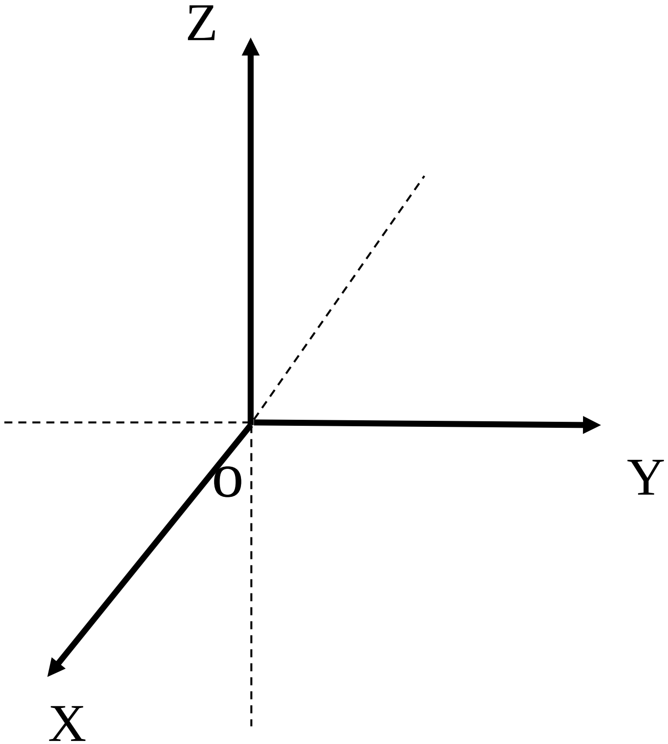
Formam-se 8 octantes



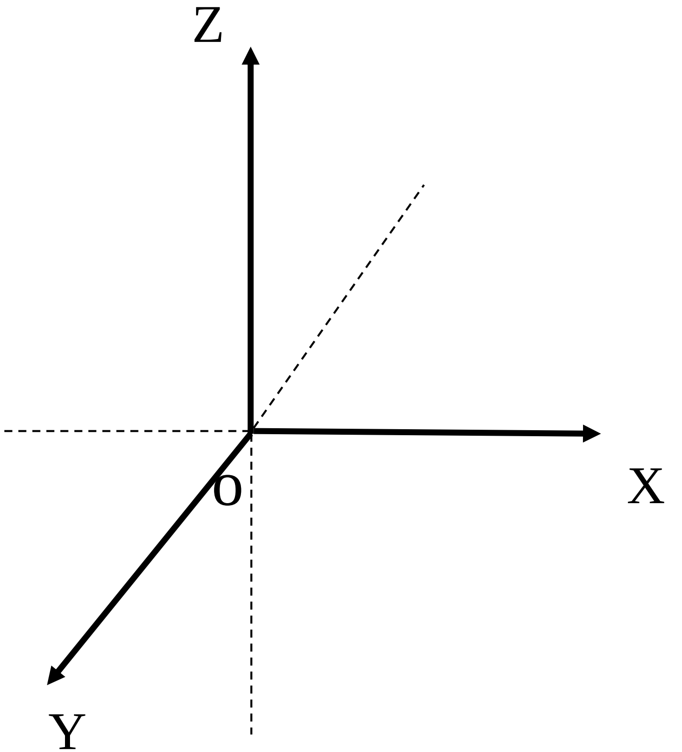


Máquina de medição tridimensional

Sistemas de coordenadas cartesianas ortogonais tridimensionais

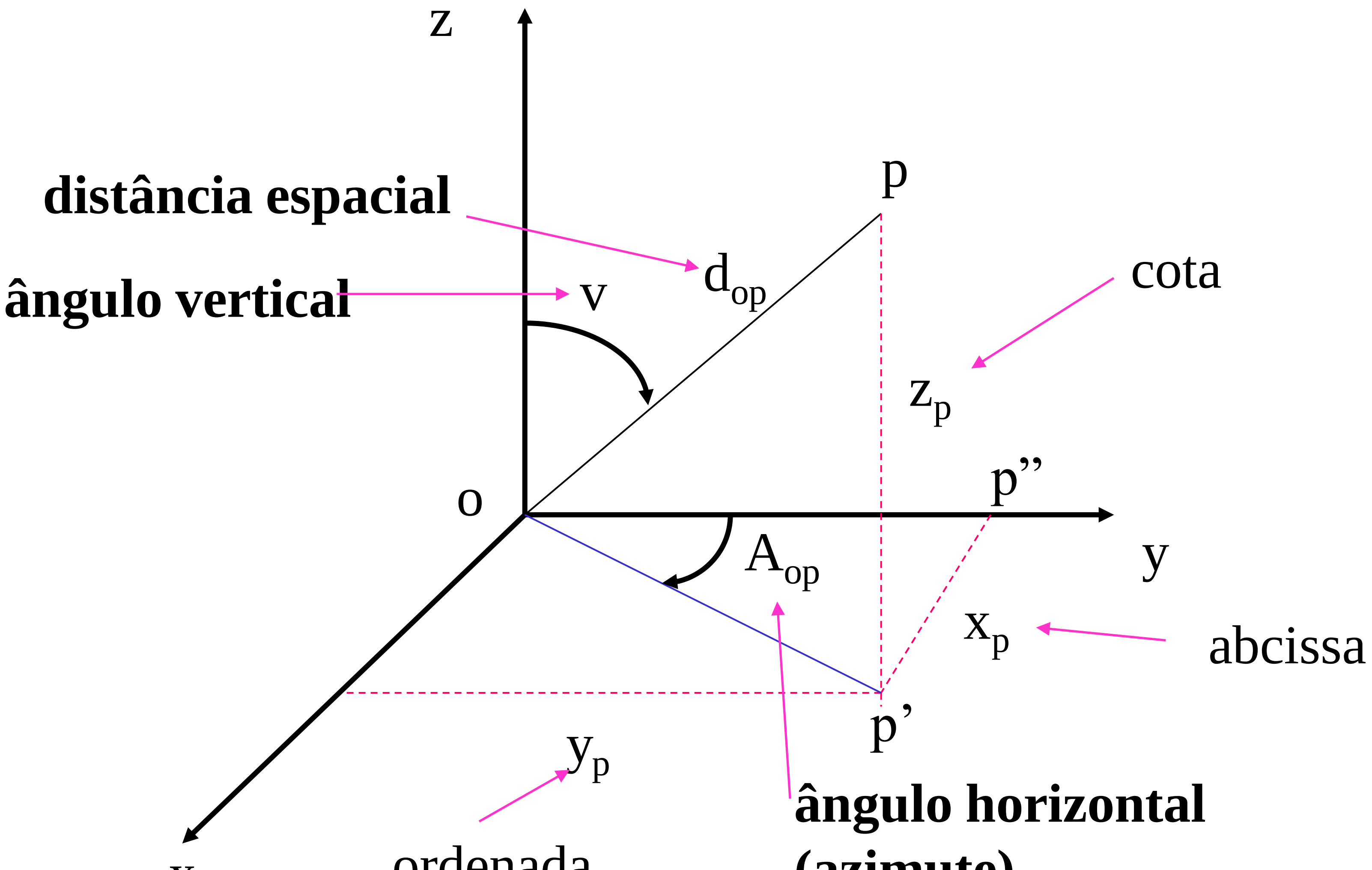


Sistema dextrógiro

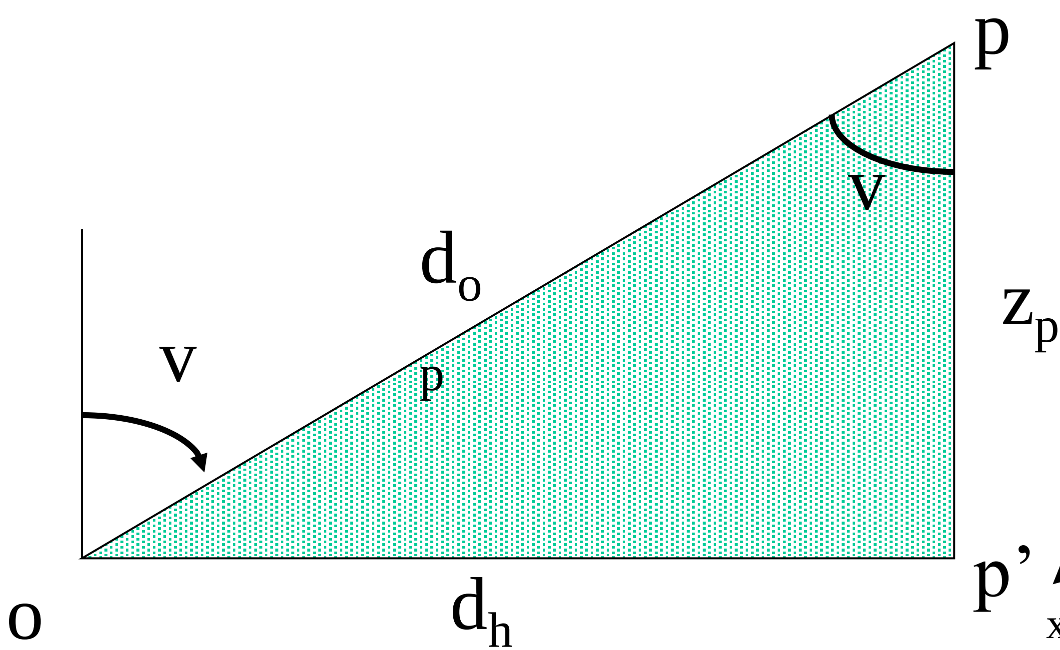


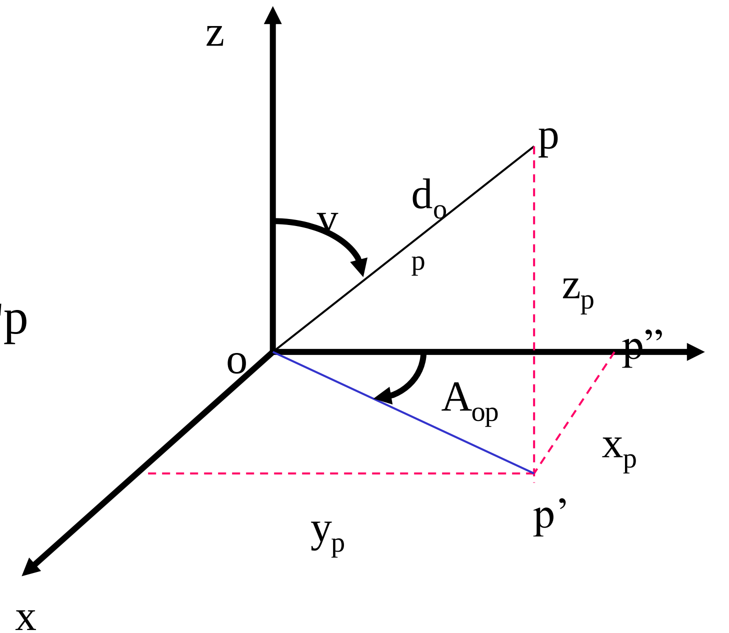
Sistema levógiro

Sistema de coordenadas cartesianas ortogonais tridimensionais e coordenadas polares



Transformação de coordenadas cartesianas em polares

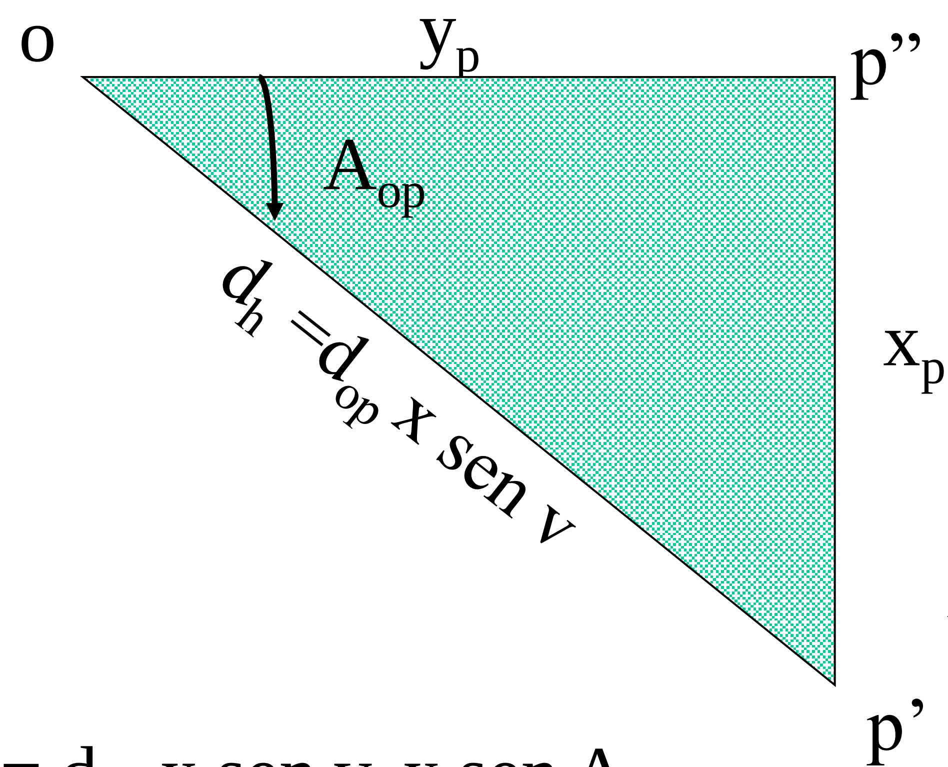


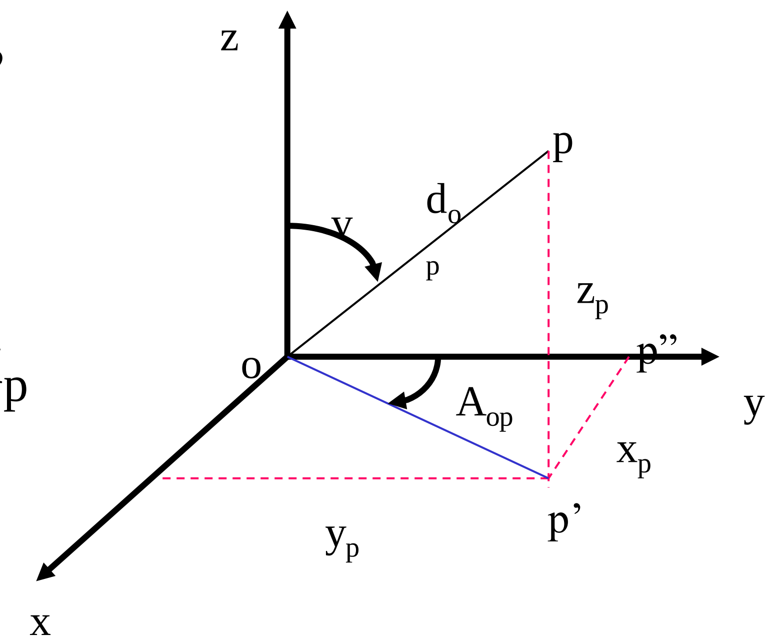


$$d_h = d_{op} \times \text{sen } v$$

$$z_p = d_{op} \times \cos v$$

Transformação de coordenadas cartesianas em polares





$$x_p = d_{op} \text{ x sen v x sen } A_{op}$$

$$y_p = d_{op} \text{ x sen v x cos } A_{op}$$

$$x_p = d_h \text{ x sen } A_{op}$$

$$y_p = d_h \text{ x cos } A_{op}$$

sistema dextrógiro

$$x_p = d_{op} \text{ sen } V \text{ sen } A_{op}$$
$$y_p = d_{op} \text{ sen } V \cos A_{op}$$
$$z_p = d_{op} \cos V$$

sistema levógiro

$$x_p = d_{op} \text{ sen } V \cos A_{op}$$
$$y_p = d_{op} \text{ sen } V \text{ sen } A_{op}$$
$$z_p = d_{op} \cos V$$

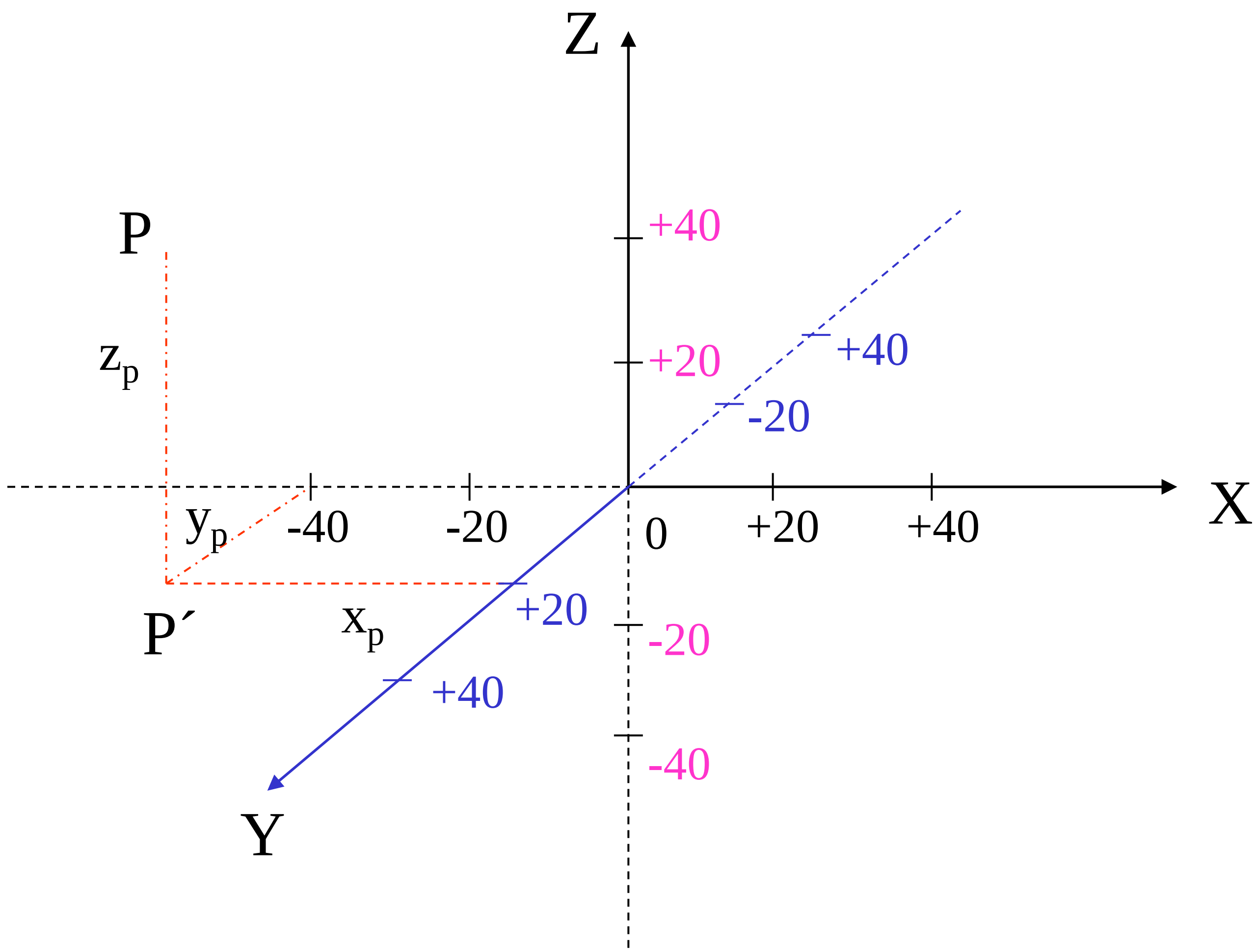
no plano com V= 90º , resultando:

$$x_p = d_{op} \text{ sen } A_{op}$$
$$y_p = d_{op} \cos A_{op}$$
$$z_p = 0$$

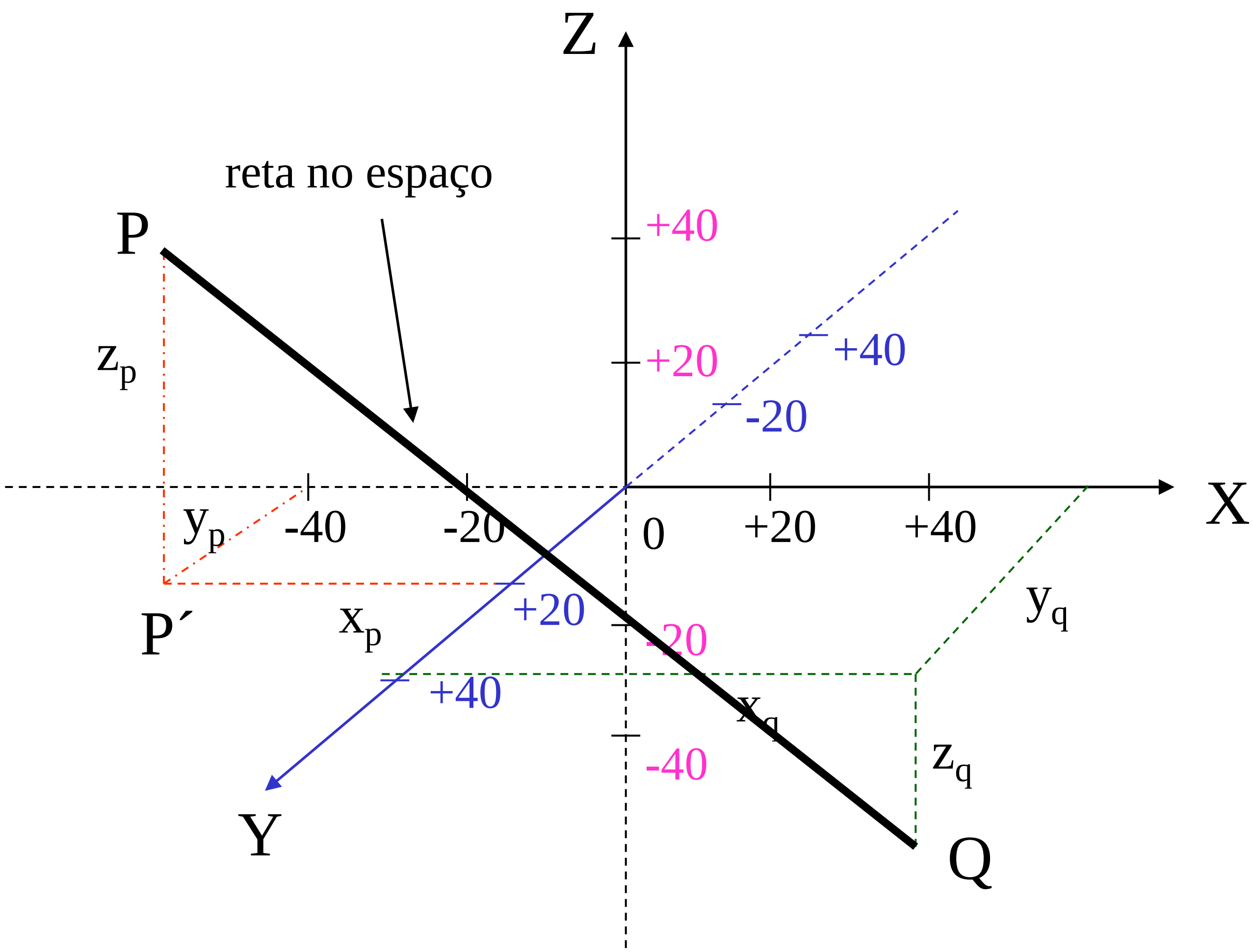
As coordenadas cartesianas ortogonais do ponto P são:

x_p = -40m y_p = +20m e z_p = +40m.

Que tipo é o sistema dextrógiro ou levógiro?



Uma linha reta no espaço pode agora ser observada como a que liga o ponto P ao ponto Q.



A distância espacial PQ é fornecida analiticamente pela expressão:

$$d = \sqrt{[(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + (z_p - z_q)^2]}$$

Assim se ponto P possuí coordenadas em metros P(-40; 20; 40) e o ponto Q possui coordenadas em metros Q(60;40;-20), a distância espacial entre eles é fornecida da seguinte forma:

$$d = \sqrt{[(-40 - 60)^2 + (20-40)^2 + (40+20)^2]}$$

$$d = \sqrt{14000}$$

$$d = 118{,}32\text{m}$$

A equação de uma reta no espaço é obtida pela solução do determinante:

$$\begin{pmatrix} x_p & y_p & z_p \\ x_q & y_q & z_q \\ x & y & z \end{pmatrix} = 0$$

As coordenadas dos pontos P(-40; 20; 40) e Q(60;40;-20) resultam na equação:

$$\begin{pmatrix} -40 & 20 & 40 \\ 60 & 40 & 20 \\ x & y & z \end{pmatrix} = 0$$

ou,

$$-1600z + 400x + 2400y – 1600x – 1200z + 800y = 0$$

$$-1200x + 3200y -2800z = 0$$

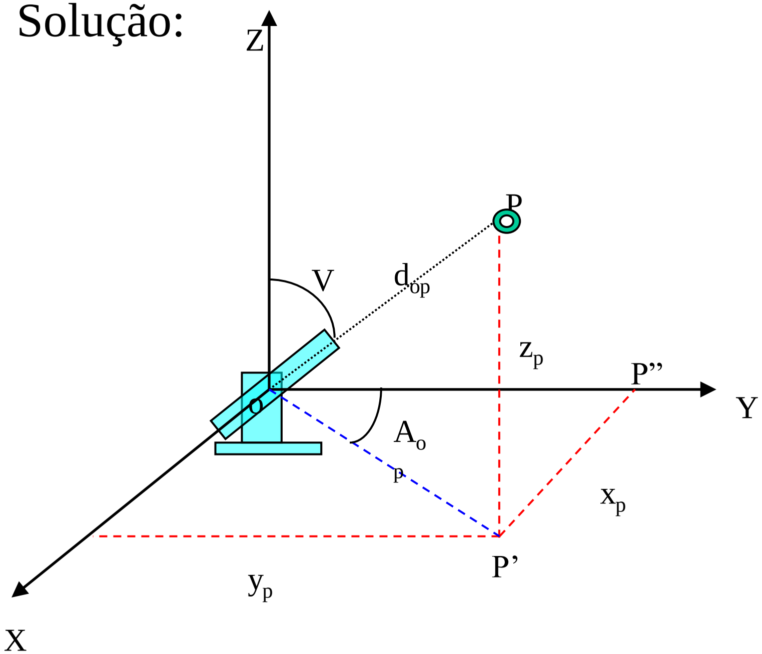
Exercício:

Utilizou-se uma estação total, com um sistema de coordenadas ortogonal tridimensional situado em seu centro óptico, com a seguinte orientação, o eixo y com sentido positivo para o norte geográfico, o eixo x com sentido positivo para leste e o eixo z coincidente com o fio de prumo com sentido positivo para o zenite (ponto situado no infinito acima da estação). Mediu-se as direções horizontais (A_{op}), direção vertical (V) e a distância inclinada d_{op} ao ponto alvo (P), obtendo-se as seguintes medidas:

$A_{op} = 26 \ \ 32 \ \ 50”$; $V = 86 \ \ 58 \ \ 15”$; $d_{op} = 125{,}632$m.

Calcular as coordenadas cartesianas ortogonais tridimensionais do alvo neste sistema.

Solução:



$x_p = d_{op}$ sen V sen A_{op}
$y_p = d_{op}$ sen V cos A_{op}
$z_p = d_{op}$ cos V

$x_p = 125{,}632$ x sen 86 58 15” sen 26 32 50”
$y_p = 125{,}632$ x sen 86 58 15” cos 26 32 50”
$z_p = 125{,}632$ x cos 86 58 15”

$x_p = 56{,}071$m
$y_p = 112{,}229$m
$z_p = 6{,}639$m

Transformação de coordenadas cartesianas ortogonais tridimensionais x_p, y_p e z_p em coordenadas esféricas polares

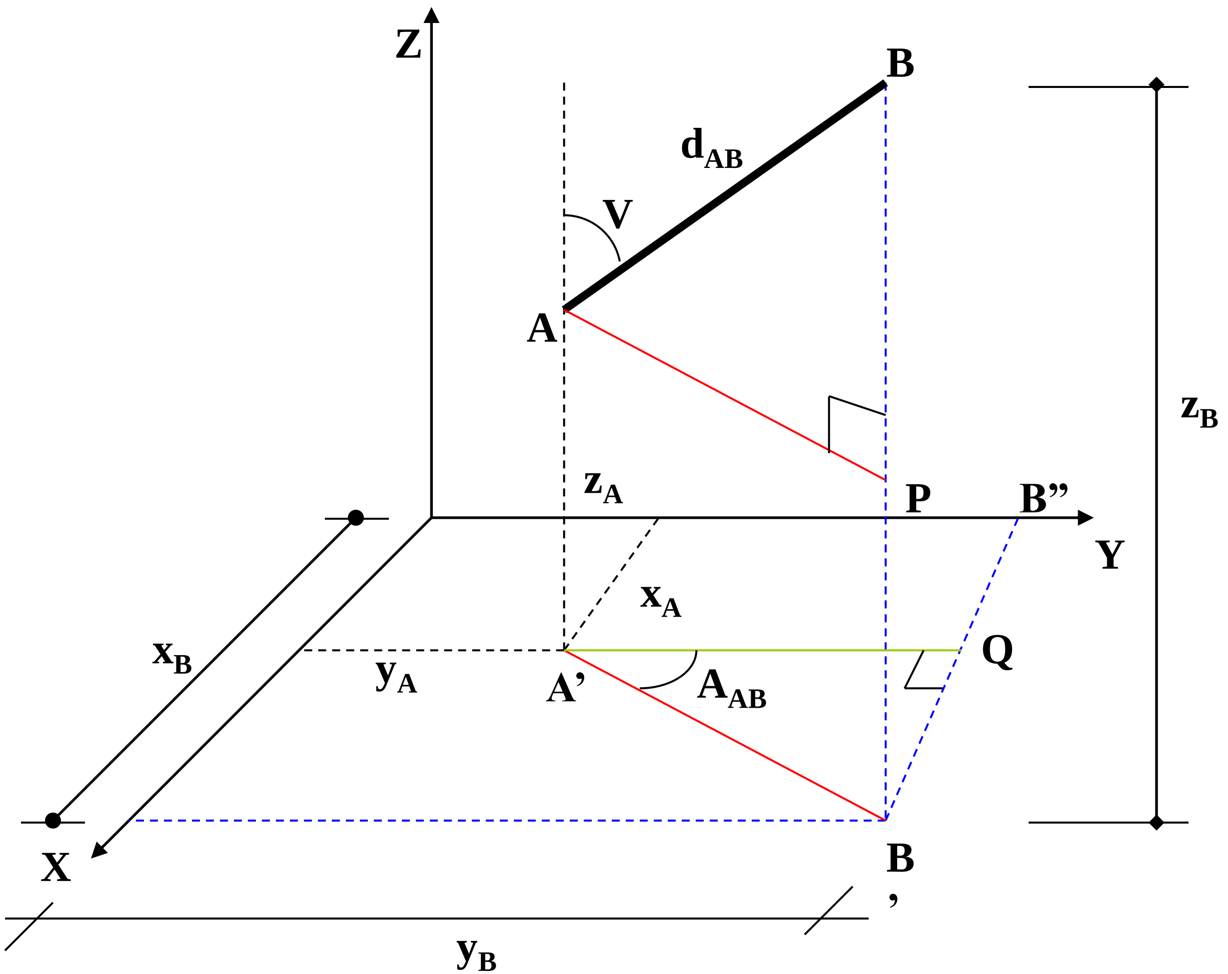
sistema dextrógiro

$$\mathrm{tg}\ A_{op} = \frac{x_p}{y_p}$$

$$V = \arc\cos \left[\frac{z_p}{\sqrt{(x_p^2 + y_p^2 + z_p^2}} \right]$$

$$d_{op} = \sqrt{(x_p^2 + y_p^2 + z_p^2}$$

Problema direto do posicionamento tridimensional



PROBLEMA DIRETO DE POSICIONAMENTO TRIDIMENSIONAL

Dadas ou conhecidas de um levantamento anterior:

coordenadas tridimensionais do ponto A x_A, y_A , z_A

Mede-se:

azimute da direção AB = A_{AB}

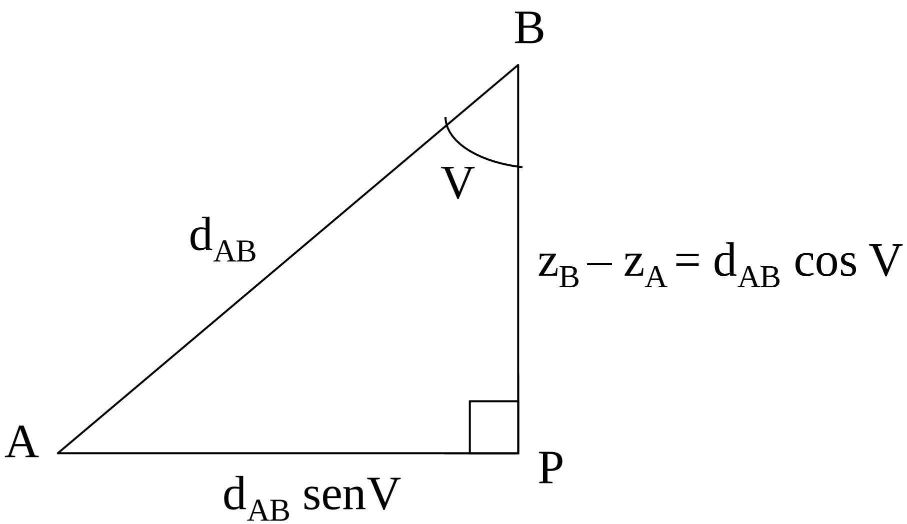
distância entre A e B = d_{AB}

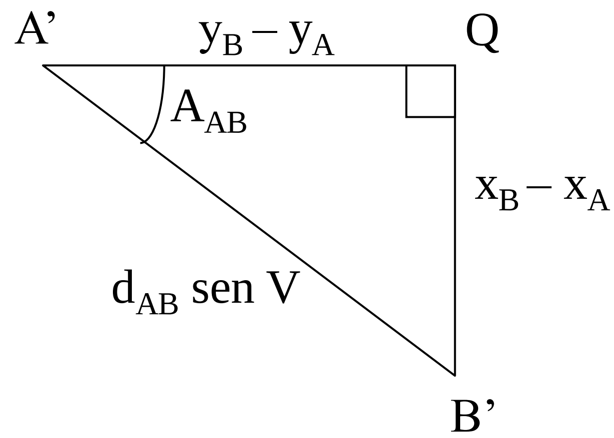
direção zenital ou distância zenital = V

Pede-se:

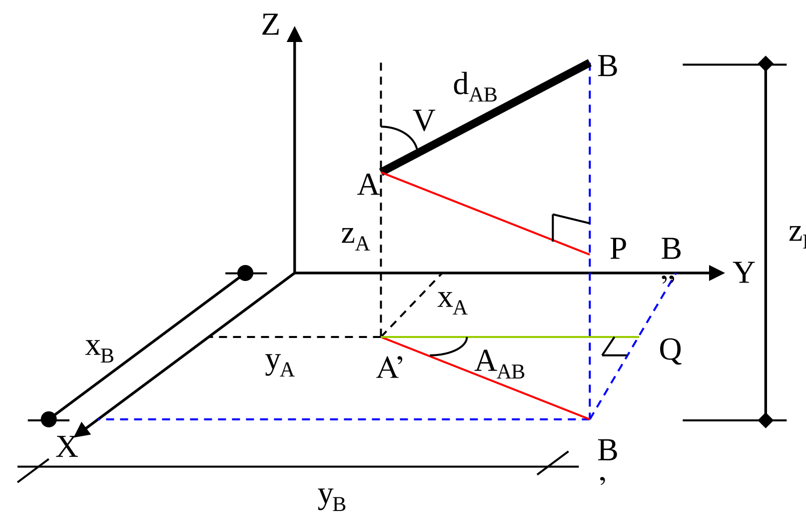
coordenadas tridimensionais do ponto B x_B, y_B , z_B

Triângulos retângulos APB e A'B'Q





$$x_B - x_A = d_{AB} \text{ sen } V \text{ sen } A_{AB}$$
$$y_B - y_A = d_{AB} \text{ sen } V \cos A_{AB}$$
$$z_B - z_A = d_{AB} \cos V$$



$$x_B = x_A + d_{AB} \text{ sen } V \text{ sen } A_{AB}$$
$$y_B = y_A + d_{AB} \text{ sen } V \cos A_{AB}$$
$$z_B = z_A + d_{AB} \cos V$$

Problema inverso do posicionamento no espaço tridimensional

Cálculo da distância espacial entre os pontos A e B

$$d_{AB} = [(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2]^{1/2}$$

Cálculo do ângulo zenital entre A e B

$$V = \arc\cos \frac{z_B - z_A}{[(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2]^{1/2}}$$

Cálculo do azimute entre os pontos A e B

$$A_{AB} = \text{arc tg} \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}$$

Exercício:

A listagem com o resultado de um rastreio GPS apresenta as coordenadas Tridimensionais geodésicas de dois vértices P01 e P02 fornecidas as seguir:

PO1 $x_1 = 3763803{,}17745$ | PO2 $x_2 = 3761470{,}79868$
$y_1 = -4366181{,}98370$ | $y_2 = -4367585{,}08810$
$z_1 = -2722619{,}51292$ | $z_2 = -2723355{,}20840$

Calcular a distância entre os vértices, o azimute do vértice P01 para P02 e a distância zenital de P01 para P02.

Solução:

Distância P01 – P02

$$d_{12} = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2}$$

$$d_{12} = \sqrt{(3761470{,}79868 - 3763803{,}17745)^2 + (-4367585{,}08810 + 4366181{,}98370)^2 + (-2723355{,}20840 + 2722619{,}51292)^2}$$

$$d_{12} = \sqrt{7949944{,}045}$$

$$d_{12} = 2819{,}565\text{m}$$

Azimute P01 – P02

$$A_{12} = \text{arc tg} \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$$

$$A_{12} = \text{arc tg} \frac{3761470{,}79868 - 3763803{,}17745}{-4367585{,}08810 + 4366181{,}98370}$$

$$A_{12} = \text{arc tg} \frac{-2332{,}379}{-1403{,}105}$$

$$A_{12} = \text{arc tg } 1{,}66229826$$

A equação apresenta duas soluções no primeiro quadrante e no terceiro quadrante.
Solução no primeiro quadrante:

$$A_{12} = 58\ \ 58\ \ 11''$$

No terceiro quadrante:

$$A_{12} = 58\ \ 58\ \ 11'' + 180 \quad \therefore \quad A_{12} = 238\ \ 58\ \ 11''$$

Como a solução pode estar no 1 ou no 3 Quadrante. A tabela abaixo esclarece a obtenção de quadrantes.

Quadrante	numerador	denominador
1 Q	+	+
2 Q	+	-
3 Q	-	-
4 Q	-	+

Neste caso, como o denominador e o numerador da divisão resultaram negativos adota-se o 3 Quadrante, assim:

$$A_{12} = 238 \quad 58 \quad 11''$$

Distância zenital P01 – P02

$$V = \arc\cos \frac{z_2 - z_1}{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2}}$$

$$V = \arc\cos \frac{-2723355{,}20840 + 2722619{,}51292}{2819{,}565}$$

$$V = \arc\cos \frac{-735{,}696}{2819{,}565}$$

$$V = \arc\cos -0{,}260925355$$

A solução encontra-se no segundo ou no terceiro quadrante, neste caso adota-se o segundo quadrante pois convenciona-se a distância zenital menor ou igual a 180 .

Solução no primeiro quadrante:

V = 74 52 30”

Solução no segundo quadrante

V = 180 - 74 52 30” $\therefore$ V =105 07 30”

Neste caso a distância zenital vale:

V =105 07 30”

UFPR

Exercício proposto:

Determinou-se as coordenadas tridimensionais do vértice PO1 obtendo-se:

$x_1 = 3763803,17745$

$y_1 = -4366181,98370$

$z_1 = -2722619,51292$

Mediu-se a partir do vértice P01 em direção ao vértice P02

$d_{12} = 2819,565m$

$A_{12} = 238\ \ 58\ \ 11''$

$V = 105\ \ 07\ \ 30''$

Calcular as coordenadas cartesianas ortogonais tridimensionais do vértice P02.

Resposta:

$x_2 = 3761470,79868$

$y_2 = -4367585,08810$

$z_2 = -2723355,20840$