Notas de aula

GA033 – Levantamentos Topográficos II

Prof. Luís Augusto Koenig Veiga

2007

Setembro 2007

Sumário

1 – Introdução........ 3
2 – Cálculo de volume de prismas e sólidos........ 3
2.1. Volume de Prismas........ 3
2.2. Princípio de Cavalieri........ 4
2.3. Volume de Sólidos........ 5
3 – Cálculo de volume em topografia........ 11
3.1. Método das Alturas Ponderadas........ 11
3.2. Método das Seções Transversais........ 30
3.3. Superfícies Eqüidistantes........ 35
3.4. Terraplenagem para Plataformas........ 39
4 - Bibliografia........ 52

Lista de Figuras

Figura 1 – Prisma........ 3
Figura 2 – Primas retos........ 4
Figura 3 – Princípio de Cavalieri........ 4
Figura 4 – Bonaventura Cavalieri........ 5
Figura 5 – Volume de uma pirâmide de base regular........ 5
Figura 6 – Volume de diferentes sólidos........ 6
Figura 7 – Equipamentos........ 10
Figura 8 – Sólido regular de base quadrada........ 11
Figura 9 – Volume pelo método das alturas ponderadas........ 12
Figura 10 – Pesos atribuídos a cada um dos vértices da malha........ 13
Figura 11 – Determinação da malha no terreno........ 14
Figura 12 – Cota de passagem........ 17
Figura 13 – Malha Triangular regular........ 20
Figura 14 – Sólido triangular........ 20
Figura 15 – malha triangular irregular........ 21
Figura 16 – Cálculo da área de um triângulo qualquer........ 21
Figura 17 – Determinação da cota de escavação........ 27
Figura 18 – Seções paralelas........ 30
Figura 19 – Seções de corte e aterro........ 30
Figura 20 – Nomenclatura das seções transversais........ 31
Figura 21 – Perfis transversais........ 33
Figura 22 – Malha de pontos........ 39
Figura 23 – Vista em perspectiva da malha........ 40
Figura 24 – Perfil "A" do terreno........ 41
Figura 25 – Interpolação........ 41
Figura 26 – Perfil seção A........ 42
Figura 27 – Perfil seção B........ 43
Figura 28 – Perfil seção C........ 43
Figura 29 – Perfil seção D........ 44
Figura 30 – Representação esquemática da hipótese 1........ 45
Figura 31 – Representação esquemática da hipótese 2........ 46
Figura 32 – Posicionamento do plano na hipótese 03........ 47
Figura 33 – Representação em perspectiva do plano da hipótese 03........ 48
Figura 34 – Perfil transversal do plano inclinado........ 48
Figura 35 – Interpolação do ponto P para o plano inclinado........ 49
Figura 36 – Esquema do plano inclinado de 1%........ 50

1 – Introdução

Em muitos trabalhos de engenharia é necessário calcular volumes, como por exemplo, em uma estrada, calcular os volumes de corte e aterro para a construção da mesma, calcular o volume de água armazenado em um reservatório, e assim por diante. Normalmente estes volumes são determinados a partir de dados de levantamentos topográficos, como as curvas de nível, seções transversais ou malha de pontos com cotas conhecidas. Segundo IRVINE (1990, p. 183), os trabalhos de movimentação de terra podem ser divididos em duas categorias:

- faixas longas e estreitas, como é o caso de rodovias e ferrovias.
- grandes áreas, como reservatórios.

No caso do cálculo de volumes, para o primeiro caso normalmente são utilizados os métodos baseados em seções transversais, no segundo caso trabalha-se com malhas de pontos ou contorno (volumes calculados através das curvas de nível). Neste trabalho será visto como fazer os cálculos para ambos os casos. Inicialmente são feitas considerações gerais sobre o cálculo de volume de prismas e sólidos e alguns exemplos de aplicação na engenharia e depois alguns métodos empregados para cálculo de volumes em topografia.

Este é um trabalho introdutório, desta forma pedimos aos leitores que nos encaminhem sugestões e correções ao texto para que futuramente possamos melhorar o mesmo.

2 – Cálculo de volume de prismas e sólidos

2.1. Volume de Prismas

Alguns dos cálculos que serão vistos estarão baseados no conceito de volumes de prisma. Considerando dois planos α e β paralelos, um polígono **P** contido num deles e uma reta **r** concorrente com os dois. Chamamos de prisma à reunião de todos os segmentos paralelos a **r**, com extremidades no polígono **P** e no outro plano (FERNANDEZ; YOUSSEF, 1991, p.280). A distância entre as bases é denominada altura (h) do prisma.

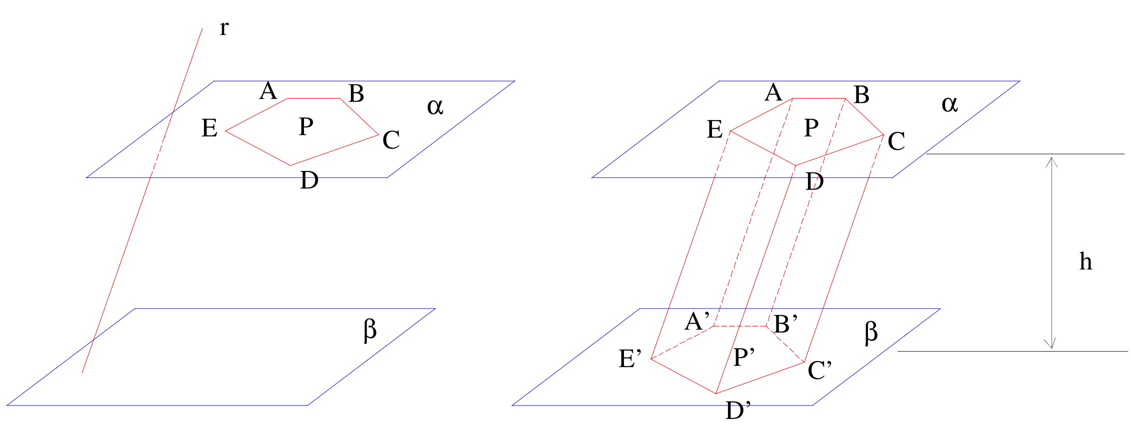
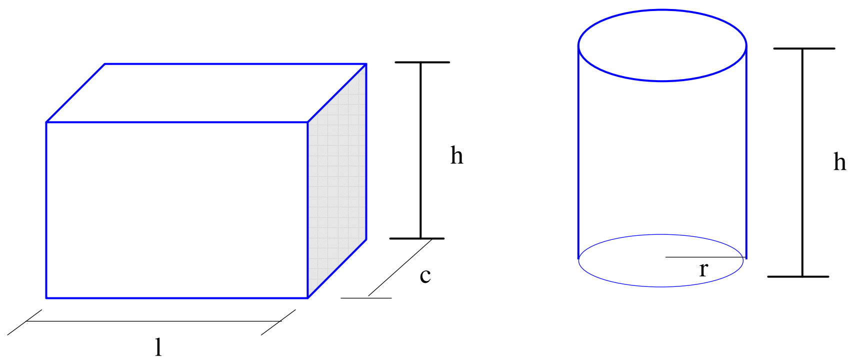


Figura 1 – Prisma.

Os primas podem ser retos, quando as arestas laterais são perpendiculares às bases, ou caso contrário, oblíquos. O volume de um prisma será igual ao produto da área da base pela sua altura.

$$V = Sb \cdot h$$

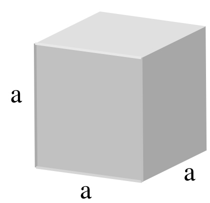


Volume Paralelepípedo = $l \cdot c \cdot h$

Volume do Cilindro = $\pi \cdot r^2 \cdot h$

Figura 2 – Primas retos

Exercício 01 – Qual é o volume de um cubo de lado 5m?



$V = Sb \cdot h$
$V = a^2 \cdot a$
$V = a^3$
$V = 5^3$

$V = 125\ m^3$

2.2. Princípio de Cavalieri

Sejam A e B dois sólidos. Se qualquer plano horizontal secciona A e B segundo figuras planas com áreas iguais, então o volume de A é igual ao de B (figura 3) (LIMA, 1975, p. 50).

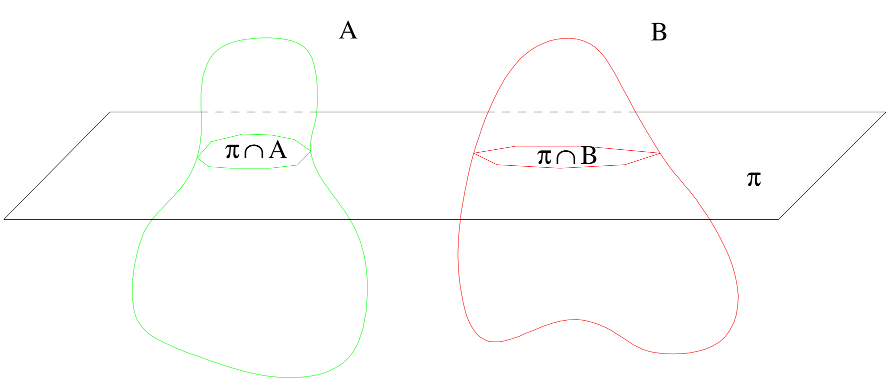


Figura 3 – Princípio de Cavalieri (Adaptada de LIMA, 1975, p.50).

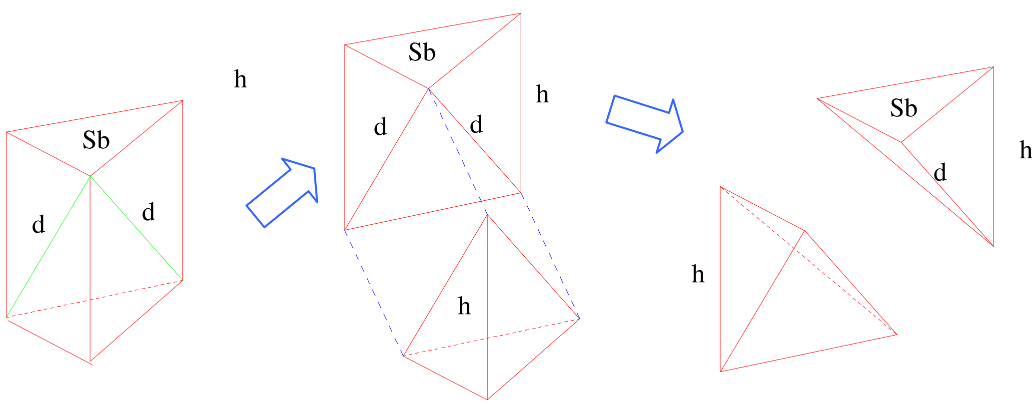
Bonaventura Cavalieri (1598-1647), Matemático italiano que formulou os princípios para o cálculo de volumes de sólidos. Adaptada de IMSS (2002).

Figura 4 – Bonaventura Cavalieri.

2.3. Volume de Sólidos

Até aqui foi visto como calcular o volume de prismas. Vejamos como calcular o volume de outros sólidos. Cabe aqui uma consideração: em diversos trabalhos é comum denominarem os sólidos de prismas, porém pela definição apresentada anteriormente, um sólido será classificado como prisma se suas bases forem paralelas e iguais e seus lados forem paralelogramos.

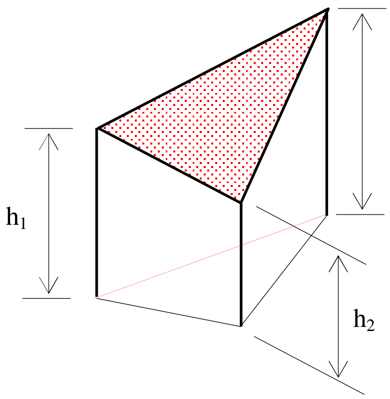
Somente como ilustração será apresentado como calcular o volume de alguns sólidos, iniciando com uma pirâmide. Seu volume é a terça parte do volume de um prisma regular de mesma base que a pirâmide dada.



$$V = \frac{1}{3} \cdot Sb \cdot h$$

Figura 5 – Volume de uma pirâmide de base regular.

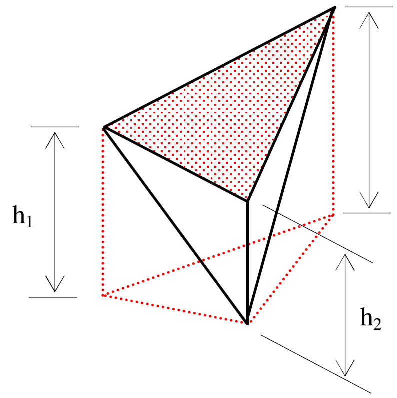
Volume de um tronco de prisma triangular



Ap = área da base projetada

$$V = Ap \cdot \left(\frac{h_1 + h_2 + h_3}{3} \right)$$

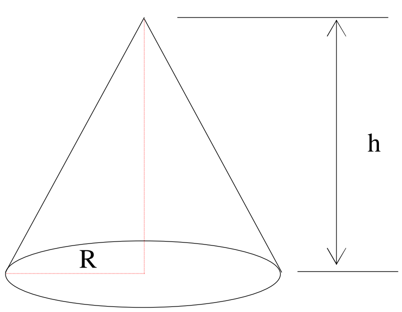
Volume de um tronco de prisma triangular



Ap = área da base projetada

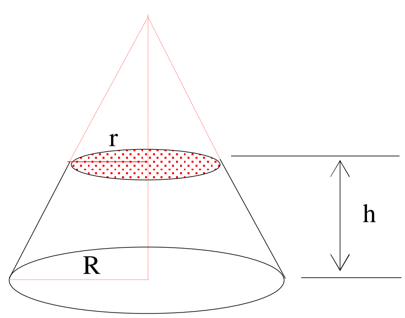
$$V = \frac{Ap}{3} \cdot \left(\frac{h_1 + h_2 + h_3}{3} \right)$$

Volume de um cone



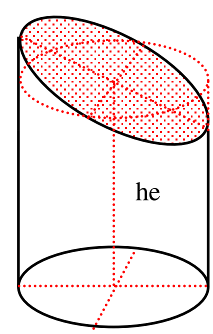
$$V = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3}$$

Volume de um tronco de cone



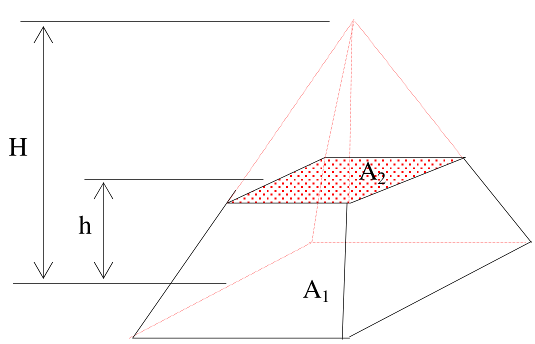
$$V = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot \left(R^2 + r^2 + Rr \right)$$

Volume de um tronco de cilindro de revolução



$$V = \pi \, r^2 \, he$$

Volume de um tronco de pirâmide

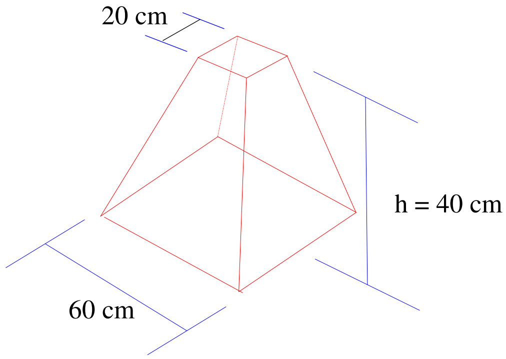


$$V = \frac{h}{3} \cdot \left(A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 \cdot A_2} \right)$$

Figura 6 – Volume de diferentes sólidos[1].

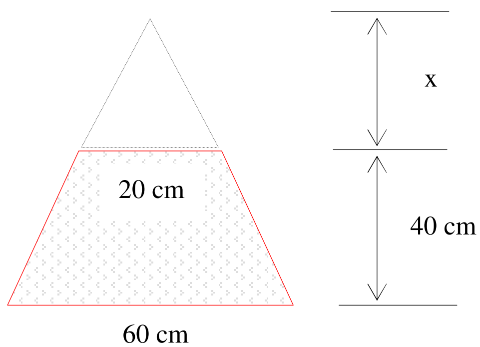
[1] As duas primeiras fórmulas foram retiradas de CHURCH (1981) e as demais de BEZERRA (1970).

Exercício 02 – Calcular o volume de concreto necessário para a construção de uma marco para fins de monumentação. As dimensões são dadas na figura.



Os marcos e pilares são protegidos por lei, sua destruição, além de ser um grande prejuízo para a nação, constitui crime punível por lei.

determinando a altura do marco



$$\frac{60}{x+40} = \frac{20}{x}$$

$$60x = 20x + 800$$
$$40x = 800$$
$$x = 20 \text{ cm}$$

Volume do marco = $V_A - V_B$

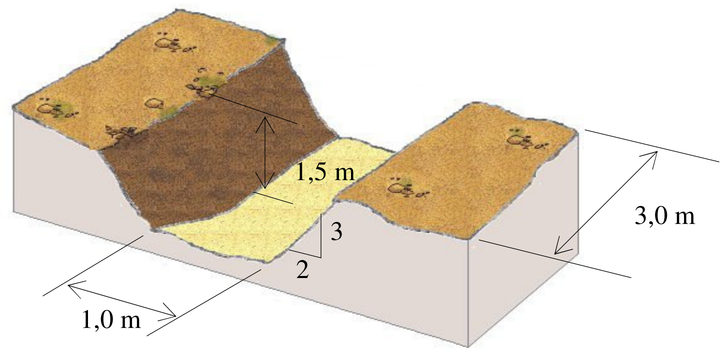
V_A – volume da pirâmide maior
V_B – volume da pirâmide menor

$$V_A = \frac{1}{3} \cdot Sb_A \cdot h_A = \frac{1}{3} \cdot 0{,}60^2 \cdot 0{,}60 \quad = 0{,}072 \quad m^3$$
$$V_B = \frac{1}{3} \cdot Sb_B \cdot h_B = \frac{1}{3} \cdot 0{,}20^2 \cdot 0{,}20 \quad = 0{,}00266 \quad m^3$$

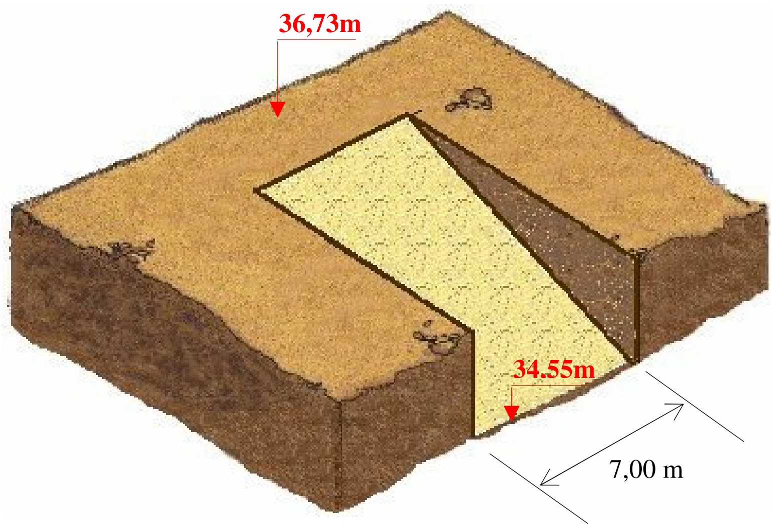
Volume do marco = $V_A - V_B$
Volume do marco = 0,072 –0,00266
Volume do marco = 0,0693 m^3

Aplicando diretamente a fórmula para cálculo de volume de tronco de pirâmides mostrada anteriormente, chega-se a um volume de 0,00693 m^3.

Exercício 03 - Uma vala foi aberta para a passagem de uma tubulação, conforme mostra a figura abaixo. Pede-se para calcular o volume de escavação efetuado. Para efeitos de cálculo, tanto o terreno quanto a base da escavação são planos.



Exercício 04 – Deseja-se construir uma rampa com inclinação de 10%, conforme o exemplo dado. Sabendo que a cota de início da rampa é de 34,55m (ponto mais baixo), que o terreno está nivelado na cota 36,73m e que a rampa deverá ter largura de 7m, calcular o volume de material a ser retirado do terreno.



Para termos noção dos volumes calculados, vamos ver alguns exemplos de capacidade de carga de equipamentos empregados em trabalhos de movimentação de terra. Logicamente que a capacidade volumétrica de cada equipamento é variável de acordo com o tipo e estado do material a ser transportado.

Caminhão Caçamba, com dois eixos: capacidade de 9 m^3

Caminhão Caçamba, com um eixo: capacidade de 6 m^3

Pá Carregadeira: capacidade coroada de 1,91 m^3

Caminhão articulado: 22 m^3

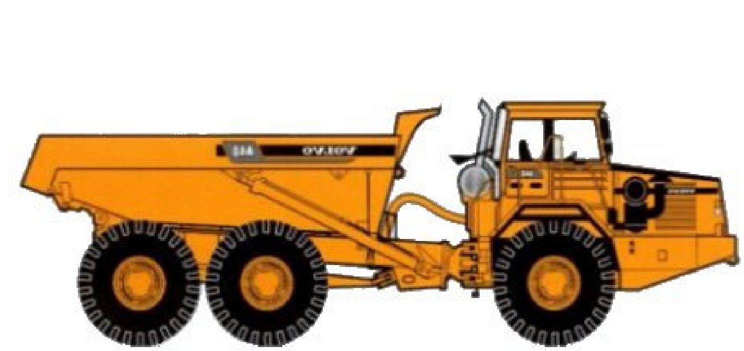


Figura 7 – Equipamentos.

3 – Cálculo de volume em topografia

3.1. Método das alturas ponderadas

Este método baseia-se na decomposição de um sólido cujo volume deseja-se calcular em sólidos menores, mais fáceis de calcular o volume. Estes sólidos são normalmente de base quadrada ou triangular. Sua utilização típica é em escavações, podendo no entanto também ser aplicado a volume de barragens e outras obras de engenharia.

Para realizar o cálculo do volume vamos fazer a seguinte consideração: imaginemos um sólido de base quadrada e área igual a Q e arestas verticais com alturas Z_1, Z_2, Z_3 e Z_4. O volume deste sólido será dado pelo produto da área da base pela média das alturas das arestas, conforme mostra a equação abaixo.

$$V = Q \cdot (Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4)/4$$

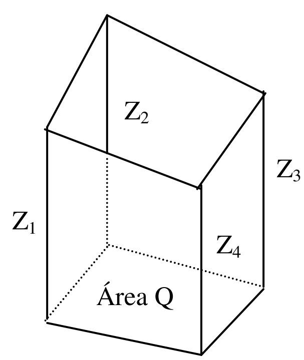


Figura 8 – Sólido regular de base quadrada

Na prática o terreno é dividido em uma malha regular e cada ponto desta malha tem a sua cota calculada por algum método de nivelamento. Então é definida a cota de escavação, ou seja a cota em que o terreno deverá ficar após a retirada do material. A partir destas informações é possível calcular as alturas dos sólidos para o cálculo do volume. O exemplo a seguir ilustra esta questão.

Vamos imaginar que queremos calcular o volume de corte de um terreno hipotético de 10x10m, cujas cotas dos cantos são dadas (figura 9-a). Num primeiro momento queremos calcular o volume de corte necessário para deixar o terreno plano na cota 85m e depois 84m.

No primeiro caso vamos ter que calcular o volume de um sólido, conforme mostra a figura 9-b. Observe que para o ponto A o sólido terá uma aresta igual a 2m, resultado da diferença entre a cota do ponto A no terreno (87m) e a cota do plano em que vai ficar o terreno (85m). Para os demais pontos o raciocínio é o mesmo para a determinação das alturas das arestas do sólido. Para o primeiro caso (figura 9-b) o volume de escavação será de $225m^3$ e para o segundo (figura 9-c) de $325m^3$.

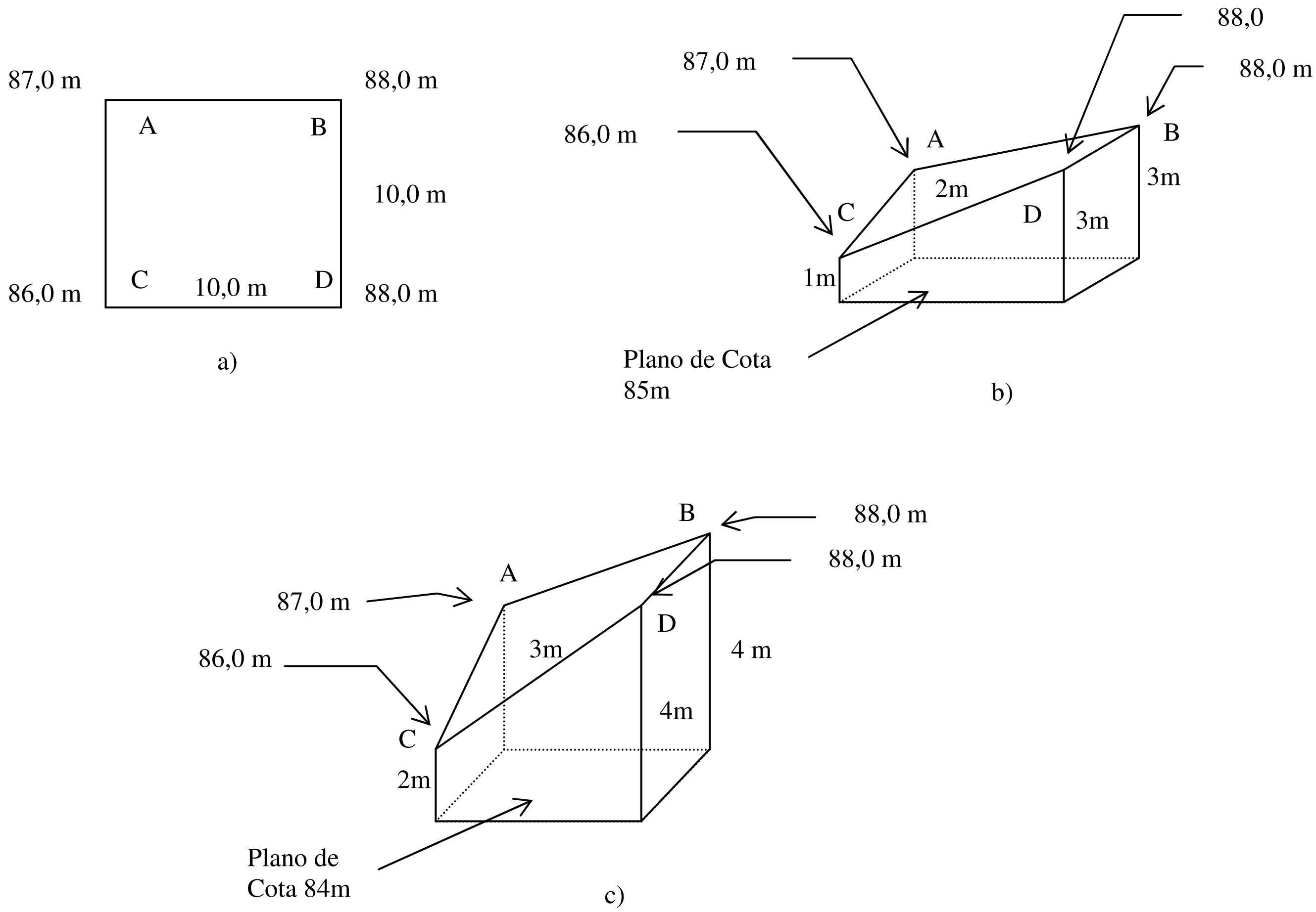
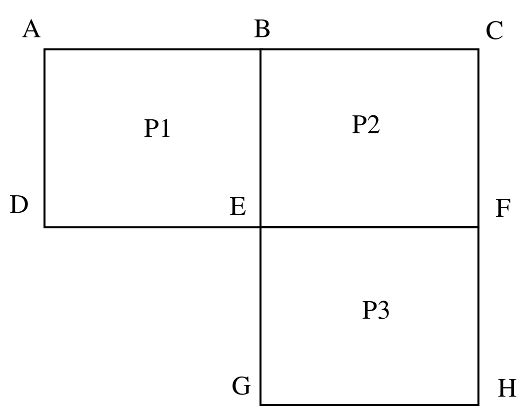


Figura 9 – Volume pelo método das alturas ponderadas.

Para uma malha de pontos podemos calcular o volume de cada célula da malha e depois somar todos os volumes, conforme mostra o próximo exercício. A partir deste vamos deduzir uma fórmula geral para o cálculo pelo métodos das alturas ponderadas.

Exercício 05 – Para a malha quadrada abaixo, de lado igual a L, calcular o volume de corte. São dadas as alturas de cada um dos sólidos..



Q = L.L

$$V_{P1} = Q.\ (A + B + D + E)/4$$

$$V_{P2} = Q.\ (B + C + E + F)/4$$

$$V_{P3} = Q.\ (E + F + G + H)/4$$

$$\text{Volume Total} = V_{P1} + V_{P2} + V_{P3}$$

$$\text{Volume Total} = [Q.\ (A + B + D + E)/4] + [Q.\ (B + C + E + F)/4] + [Q.\ (E + F + G + H)/4]$$

$$\text{Volume Total} = Q/4\ .\ (A + B + D + E + B + C + E + F + E + F + G + H)$$

$$\text{Volume Total} = Q/4\ .\ (A + 2B + C + D + 3E + 2F + G + H)$$

$$\text{Volume Total} = Q/4\ .\ (A + C + D + G + H + 2B + 2F + 3E)$$

Esta última equação seria o resultado do exercício. Notar que os pontos que entram somente no cálculo de um sólido recebem peso 1 (ponto A por exemplo), pontos que entram no cálculo do volume de dois sólidos peso 2 (pontos B e F) e finalmente, para pontos utilizados no cálculo do volume de 3 sólidos peso 3 (ponto E). A partir desta dedução é possível chegar a uma fórmula geral para o cálculo do volume através do método das alturas ponderadas:

$$V = \frac{Q}{4} \cdot \left(\Sigma D_1 + 2\Sigma D_2 + 3\Sigma D_3 + 4\Sigma D_4 \right)$$

Onde os pesos 1, 2, 3 e 4 correspondem:

1 – pontos localizados nos cantos da malha
2 – pontos localizados nas bordas da malha
3 – pontos localizados em cantos reversos da malha
4 – pontos localizados no interior da malha

A figura abaixo mostra os pesos que cada tipo de vértice recebe, conforme visto anteriormente.

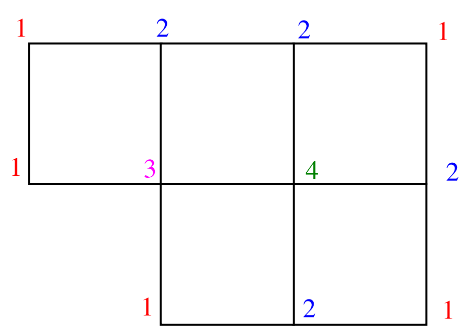
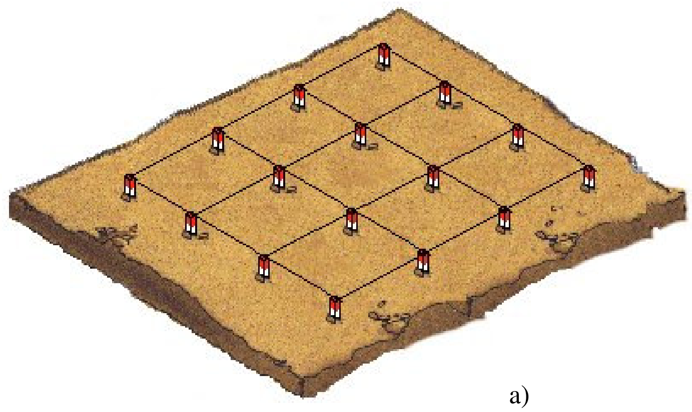
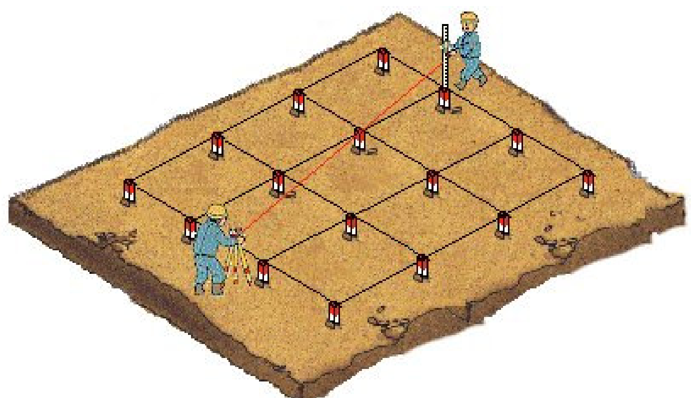


Figura 10 – Pesos atribuídos a cada um dos vértices da malha.

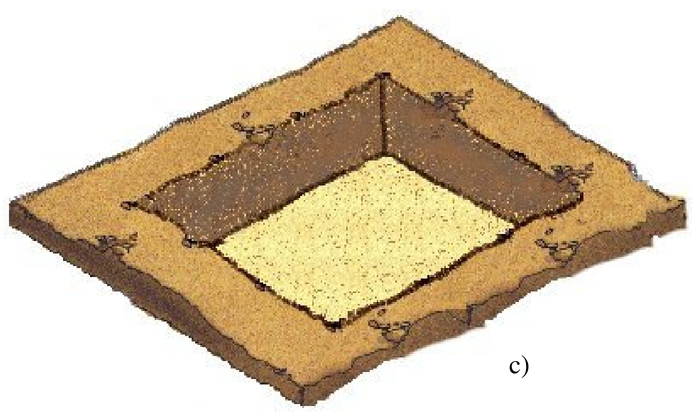
Para a determinação da malha no terreno procederemos da seguinte forma: a primeira etapa é a quadriculação do terreno (figura 11-a). Esta etapa pode ser realizada somente a trena ou com auxílio de um instrumento como um teodolito ou estação total. No exemplo da figura 11 os pontos da malha foram materializados por piquetes. Depois faz-se a determinação das cotas ou altitudes dos pontos, através de algum método de nivelamento (figura 11-b). Finalmente após a escavação teremos o terreno na forma requerida pelo projeto (figura 11-c).



a)



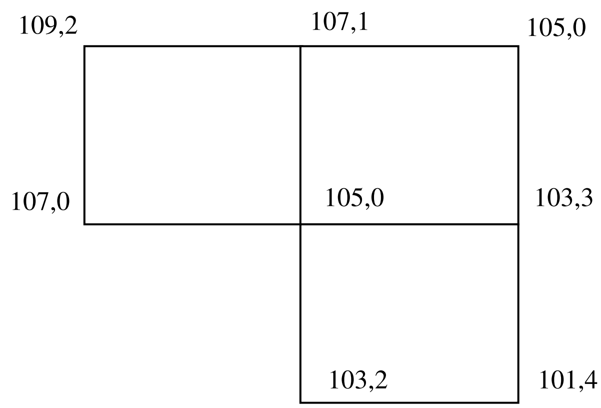
b)



c)

Figura 11 – Determinação da malha no terreno.

Exercício 06 – Calcular o volume de corte para a malha dada abaixo. A cota de escavação é 100m e o lado da malha quadrada mede 20 m. São dadas as cotas, em metros, de cada um dos vértices da malha.



$$Q = 20 \,.\, 20 = 400 \text{ m}^2$$

Somatória dos pontos com peso 1 :

$109{,}2 – 100 = 9{,}2$
$107{,}0 – 100 = 7{,}0$
$105{,}0 – 100 = 5{,}0$
$103{,}2 – 100 = 3{,}2$
$101{,}4 – 100 = 1.4$

$$\Sigma 1 = 9{,}2 + 7{,}0 + 5{,}0 + 3{,}2 + 1{,}4 = 25{,}8$$

Somatória dos pontos com peso 2 :

$107{,}1 – 100 = 7{,}1$
$103{,}3 – 100 = 3{,}3$

$$\Sigma 2 = 7{,}1 + 3{,}3 = 10{,}4$$

Somatória dos pontos com peso 3 :

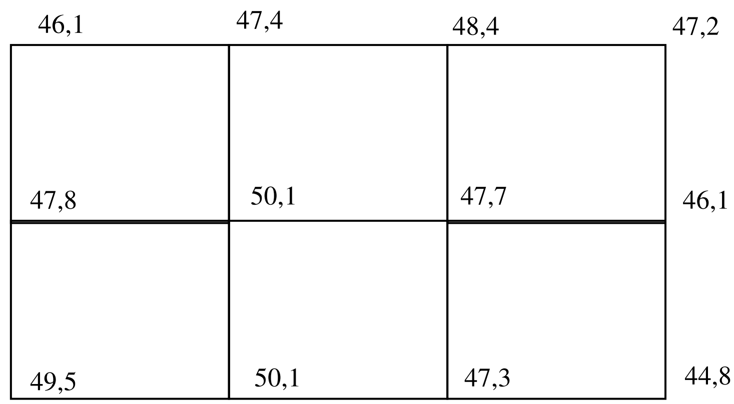
$105{,}0 – 100 = 5{,}0$

$$\Sigma 3 = 5{,}0$$

$$\text{Volume} = 400/4 \,.\, (25{,}8 + 2.\ 10{,}4 + 3.\ 5)$$

$$\text{Volume} = 6160{,}0 \text{ m}^3$$

Exercício 07 – Calcular o volume de corte para a malha dada abaixo. A cota de escavação é 47 m e o lado da malha quadrada mede 20 m. São dadas as cotas, em metros, de cada um dos vértices da malha.



Resposta : Volume = 2500 m^3

Em alguns casos pode ser necessário que o volume de corte seja igual ao volume de aterro. Imaginemos que calculamos para o sólido formado pelas cotas A, B, C e D (figura 12) o volume de corte para uma determinada cota de escavação. Agora queremos calcular qual seria a cota para a qual o volume de corte seja igual ao volume de aterro (esta cota tem um nome específico: cota de passagem – Cp). Neste caso o volume do sólido ABCD tem que ser igual ao volume final do paralelogramo formado. Assim, como a área da base e o volume são os mesmos para ambos os casos, o que vai mudar é cota de escavação.

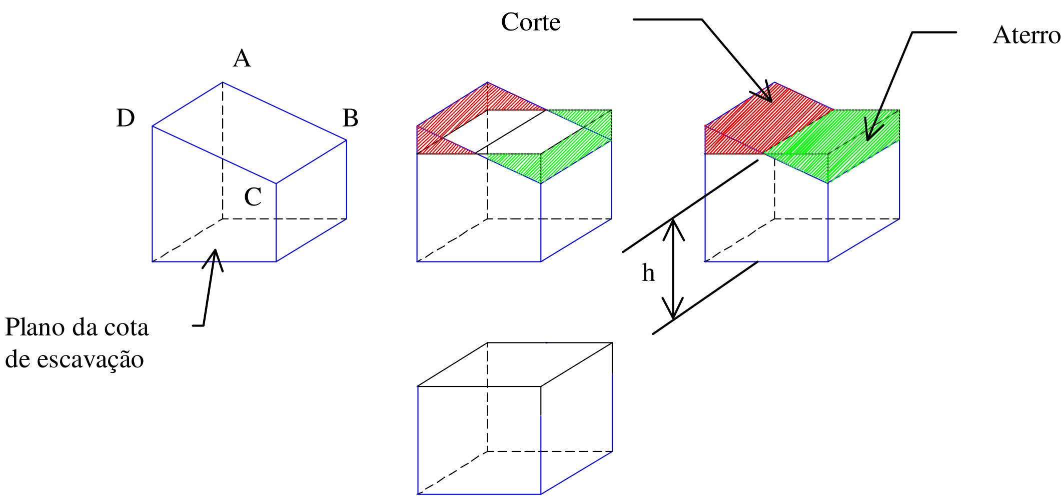


Figura 12 – Cota de passagem

Então para uma cota de escavação Co encontramos um volume Vo. Agora queremos calcular um valor de cota de passagem (Cp) para qual o volume de corte compensaria o volume de aterro.

$$Vo = S \cdot h$$

onde S = área da base

$$h = Vo / S$$

Este valor de h está referenciado ao plano de cota Co, então o valor final da cota de passagem será:

$$Cp = Co + h$$

$$Cp = Co + Vo/S$$

Vamos então verificar esta fórmula. Para o exercício 06, utilizando uma cota de escavação de 100 m o volume final de escavação seria 6160 m^3. Lembrando que o espaçamento da malha é de 20 m e que área total da mesma é de 1200 m^2 (20m . 20m . 3), vamos calcular a cota de passagem para este caso.

$$Cp = 100 + (6160 / 1200)$$
$$Cp = 105,13 \text{ m}$$

Isto significa que realizando o cálculo do volume para esta cota de escavação, o volume final deverá ser igual a zero. Fazendo os cálculos chegamos a um volume de 4 m^3. A diferença em relação a zero é proveniente da questão do arredondamento no cálculo do valor da cota de passagem

Outra forma de calcular a cota de passagem é fazendo uma média ponderada dos valores das cotas dos pontos da malha, onde o peso de cada cota segue o mesmo raciocínio dos pesos mostrados anteriormente, ou seja, pontos do canto da malha, peso 1, pontos das bordas da malha peso 2 e assim por diante. Vejamos o cálculo para o mesmo exercício 06.

Cota	Peso	Cota x Peso
109,2	1	109,2
107,1	2	214,2
105,0	1	105,0
107,0	1	107,0
105,0	3	315,0
103,3	2	206,6
103,2	1	103,2
101,4	1	101,4
Σ	12	1261,6

Cota de passagem = Σ Cota. Peso / Σ Pesos

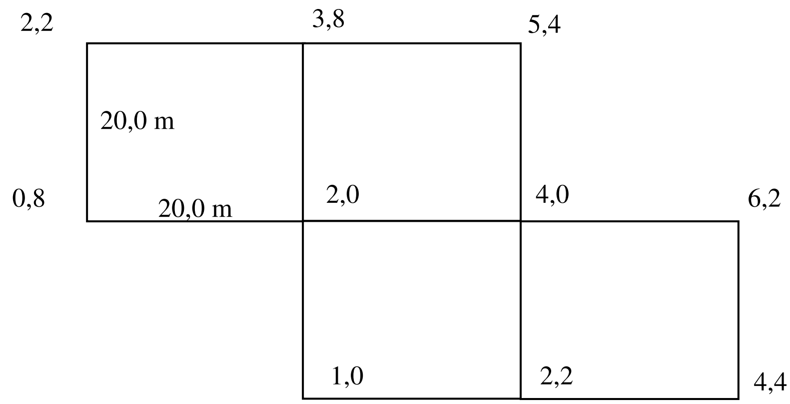
Cota de Passagem = 105,13 m

que é o mesmo valor calculado pela fórmula anteriormente.

Exercício 08 – Calcular a cota de passagem para o exemplo dado no exercício 07.

Resposta : Cota de passagem = 48,04 m

Exercício 09 – Calcular a cota final para a plataforma horizontal com volume de corte e aterro iguais. Calcular também o número de viagens de caminhão com 8m^3 por viagem, necessários caso seja imposta a cota final igual a 3,5 m. As cotas dos pontos estão em metros. (Adaptado de Borges, 1995, p. 83)



Cota	Peso	Cota x Peso
2,2	1	2,2
5,4	1	5,4
0,8	1	0,8
6,2	1	6,2
1,0	1	1,0
4,4	1	4,4
3,8	2	7,6
2,2	2	4,4
2,0	3	6,0
4,0	3	12,0
Σ	16	50

Cota de passagem = Σ Cota. Peso / Σ Pesos

Cota de Passagem = 3,125 m

Então a altura final do plano horizontal para o qual o volume de corte e aterro são iguais é de 3,125m. Para deixarmos o terreno na cota 3,5m teremos que acrescentar material ao mesmo. O volume de aterro a ser feito será dado pela diferença entre a cota imposta de menos a cota de passagem, vezes a área do terreno.

Volume de aterro = (3,5 – 3,125). (4. 20. 20) = 600m^3

Uma vez calculado o volume de aterro vamos ver o número de viagens de caminhão para transportar este material.

Número de viagens = 600m^3/ 8m^3 = 75 viagens

Podemos também, ao invés de utilizar uma malha quadrada, utilizar uma malha triangular para efetuar o cálculo do volume, conforme mostra a figura abaixo, aonde a área total foi dividida em 8 triângulos. Como todos os triângulos possuem a mesma área vamos chamar esta malha de malha triangular regular. Posteriormente veremos o porque desta classificação.

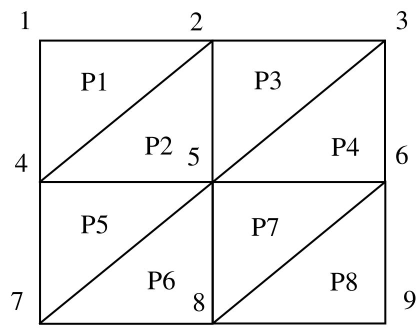


Figura 13 – Malha Triangular regular.

O princípio de cálculo será o mesmo utilizado anteriormente, somente que agora vamos trabalhar com sólidos triangulares (figura 14).

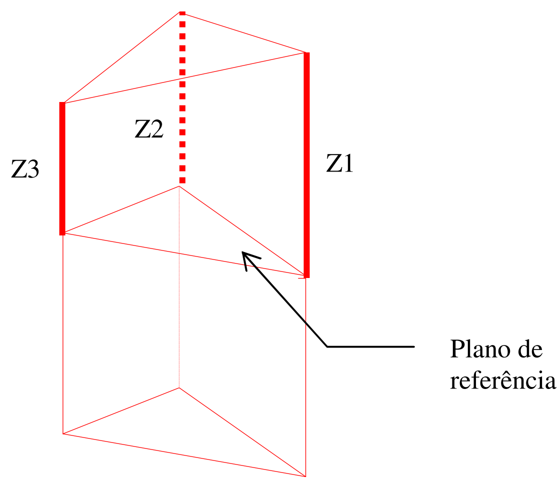


Figura 14 – Sólido triangular.

O volume será dado por:

$$V = A \cdot \frac{(Z_1 + Z_2 + Z_3)}{3}$$

No exemplo da figura 13 podemos notar que o ponto 4 é utilizado no cálculo do volume de três sólidos (P1, P2 e P5), o ponto 1 em um sólido (P1), o ponto 5 em seis sólidos (P2, P3, P4, P5, P6 e P7), etc. Então podemos definir uma equação geral para o cálculo de volumes em malhas triangulares regulares:

$$V = \frac{A}{3} \cdot \left(\Sigma D_1 + 2\Sigma D_2 + 3\Sigma D_3 + ... + n\Sigma D_n\right)$$

Onde:

A – área plana do triângulo
1 – pontos que são vértices de apenas um triângulo
2 – pontos que são vértices de dois triângulos
...
n – pontos que são vértices de "n" triângulos

Poderemos também trabalhar com malhas triangulares irregulares. Porém neste caso teremos que calcular o volume de cada um dos sólidos triangulares independentemente, pois as áreas dos sólidos serão diferentes.

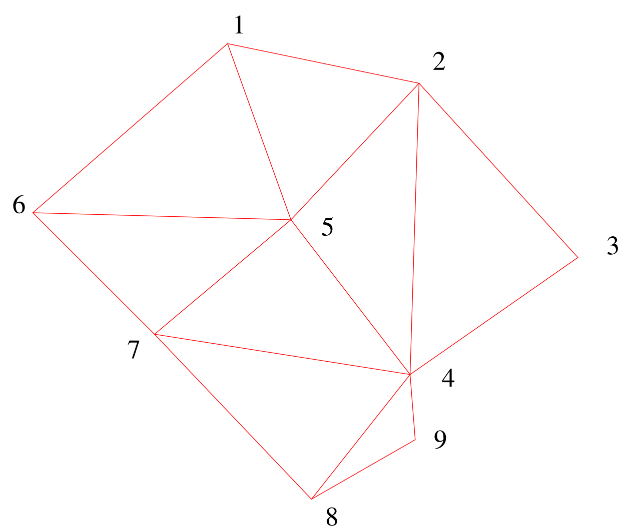
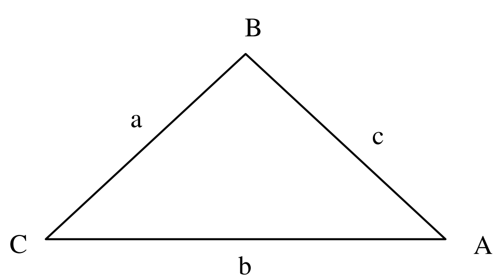


Figura 15 – malha triangular irregular

A área de cada triângulo poderá ser calculada pela fórmula apresentada a seguir, entre outras.

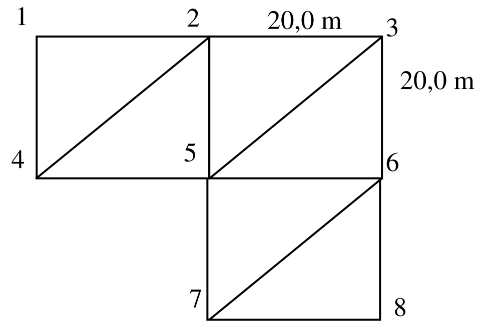


$$Area = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

$$p = \frac{(a+b+c)}{2}$$

Figura 16 – Cálculo da área de um triângulo qualquer.

Exercício 10 – Para a malha triangular regular dada, calcular o volume de corte para a cota 100m e a cota de passagem.



Área do triângulo = (20m . 20m)/2 = 200 m^2
Área total da malha (S) = 200m^2 . 6 = 1200m^2

Ponto	Cota (m)	he = Cota – Cota de Escavação	Peso	Peso. he
1	**109,2**	9,2	1	9,2
2	**107,1**	7,1	3	21,3
3	**105,0**	5,0	2	10,0
4	**107,0**	7,0	2	14,0
5	**105,0**	5,0	4	20,0
6	**103,3**	3,3	3	9,9
7	**103,2**	3,2	2	6,4
8	**101,4**	1,4	1	1,4
			Somatório =	**92,2**

$$V = \frac{A}{3} \cdot \left(\Sigma D_1 + 2\Sigma D_2 + 3\Sigma D_3 + \ldots + n\Sigma D_n\right)$$

$$V = \frac{200}{3}.92,2$$

$$V = 6146,67 \text{ m}^3$$

Cota de passagem:

$$Cp = Co + \frac{Vo}{S}$$

$$Cp = 100 + \frac{6146,67}{1200}$$

$$Cp = 105,12 \text{ m}$$

Também podemos calcular a cota de passagem pela média ponderada das cotas dos prismas triangulares. A ponderação é uma função do número de sólidos triangulares que cada ponto entra no cálculo. Cabe ressaltar que somente podemos utilizar esta forma de cálculo porque todos os triângulos possuem a mesma área.

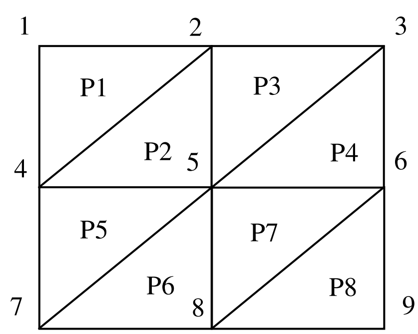
Ponto	Cota (m)	Peso	Peso. Cota
1	**109,2**	1	109,2
2	**107,1**	3	321,3
3	**105,0**	2	210,0
4	**107,0**	2	214,0
5	**105,0**	4	420,0
6	**103,3**	3	309,9
7	**103,2**	2	206,4
8	**101,4**	1	101,4
	Σ	18	**1892,2**

$$Cp = \frac{\sum Cota \cdot Peso}{\sum Pesos}$$

$$Cp = \frac{1892{,}2}{18}$$

$$Cp = 105{,}12 \text{ m}$$

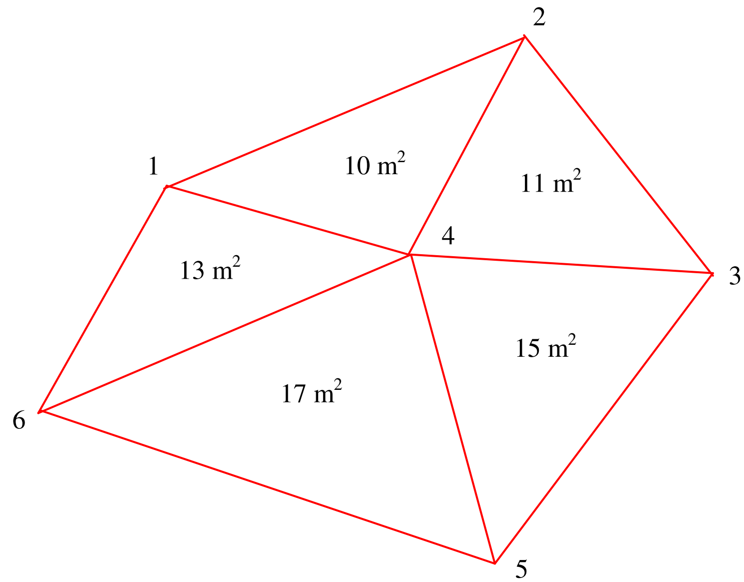
Exercício 11 – Para a malha triangular regular dada, calcular o volume de corte para a cota 40 m e a cota de passagem. As hipotenusas dos triângulos medem 14,14m.



Área do triângulo = m^2
Área total da malha (S) = m^2

Ponto	Cota (m)	he = Cota – Cota de Escavação	Peso	Peso. he
1	41,3			
2	42,5			
3	43,2			
4	42,7			
5	43,0			
6	44,2			
7	43,9			
8	44,7			
9	45,0			
			Somatório =	

Exercício 12 – Para a malha triangular irregular dada, calcular o volume de corte para a cota 30 m e a cota de passagem. São dadas as áreas de cada triângulo.



Área total da malha (S) = 10 + 11 + 13 + 15 + 17 = 66 m²

Ponto	Cota (m)	he = Cota – Cota de Escavação
1	32,7	2,7
2	31,3	1,3
3	33,0	3,0
4	32,5	2,5
5	34,2	4,2
6	32,5	2,5

$$V = A \cdot \frac{(Z_1 + Z_2 + Z_3)}{3}$$

$$V_{124} = \frac{10}{3} \cdot (2{,}7 + 1{,}3 + 2{,}5) = \frac{10}{3} \cdot 6{,}5 = 21{,}67\,m^3$$

$$V_{234} = \frac{11}{3} \cdot (1{,}3 + 3{,}0 + 2{,}5) = \frac{11}{3} \cdot 6{,}8 = 24{,}93\,m^3$$

$$V_{345} = \frac{15}{3} \cdot (3{,}0 + 2{,}5 + 4{,}2) = \frac{15}{3} \cdot 9{,}7 = 48{,}5\,m^3$$

$$V_{456} = \frac{17}{3} \cdot (2{,}5 + 4{,}2 + 2{,}5) = \frac{17}{3} \cdot 9{,}2 = 52{,}13\,m^3$$

$$V_{146} = \frac{13}{3} \cdot (2{,}7 + 2{,}5 + 2{,}5) = \frac{13}{3} \cdot 7{,}7 = 33{,}37\,m^3$$

Volume = 21,67 + 24,93 + 48,5 + 52,13 + 33,37 = 180,6 m³

Cota de passagem:

$$Cp = Co + \frac{Vo}{S}$$

$$Cp = 30 + \frac{180,6}{66}$$

Cp = 32,736 m

Vamos refazer o cálculo do volume utilizando a cota de passagem como cota de escavação. O volume tem que ser igual a zero ou bem próximo de zero, neste último caso por problemas de arredondamento.

Ponto	Cota (m)	he = Cota – Cota de Escavação
1	32,7	-0.036
2	31,3	-1.436
3	33,0	0.264
4	32,5	-0.236
5	34,2	1.464
6	32,5	-0.236

$V_{124} = -5,693\ m^3$
$V_{234} = -5,162\ m^3$
$V_{345} = 7,46\ m^3$
$V_{456} = 5,621\ m^3$
$V_{146} = -2,201\ m^3$

Volume = 0,03 m^3, ou seja, bem próximo a zero!

Neste caso, quando formos calcular a cota de passagem pelo processo da média ponderada, não podemos utilizar como peso a quantidade de vezes que um mesmo ponto é utilizado no cálculo de diferentes sólidos, isto porque a área de cada triângulo é diferente e isto interferiria nos cálculos. Somente como curiosidade, utilizando este processo a cota de passagem calculada para este exemplo seria 32,66m. Desta forma vamos utilizar como peso para o ponto a somatória das áreas dos sólidos nos quais o mesmo é utilizado para o cálculo do volume.

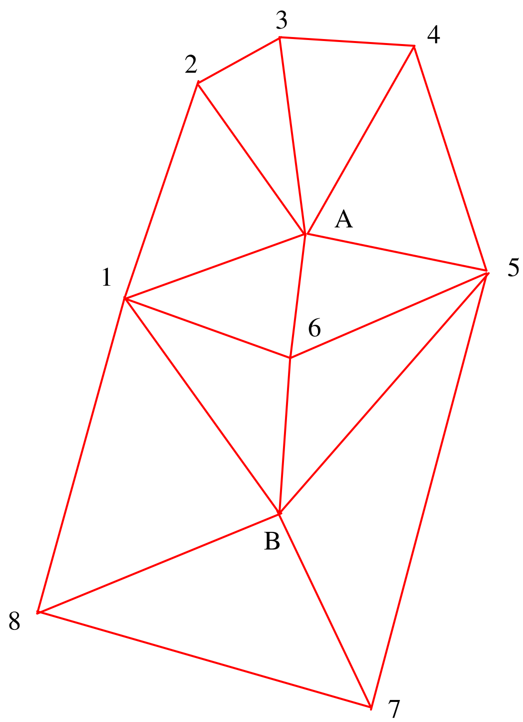
Ponto	Cota (m)	Peso	Peso. Cota
1	32,7	10 + 13 = **23**	752,1
2	31,3	10 + 11 = **21**	657,3
3	33,0	11 + 15 = **26**	858,0
4	32,5	10 + 11 + 15 + 17 + 13 = **66**	2145,0
5	34,2	15 + 17 = **32**	1094,4
6	32,5	17 + 13 = **30**	975,0
	Σ	**198**	**6481,8**

$$Cp = \frac{\sum Cota \cdot Peso}{\sum Pesos}$$

$$Cp = \frac{6481,8}{198}$$

Cp = 32,736 m, conferindo com o cálculo anterior!

Exercício 13. Duas estações (A e B) foram tomadas como base para a determinação das cotas de um conjunto de pontos que definem uma malha triangular. Os desníveis obtidos a partir de cada uma destas estações são dados, bem como as áreas de cada um dos triângulos. Calcular qual seria o volume acima do plano com cota 5,8 m abaixo da estação A. (Adaptado de BANNISTER; BAKER, 1994, p. 172).



Desníveis em relação ao ponto A	
Ponto	Desnível (m)
1	-5,24
2	-4,93
3	-4,72
4	-5,03
5	-5,35
6	+0,24

Desníveis em relação ao ponto B	
Ponto	Desnível (m)
6	+0,62
7	-5,25
8	-5,31

Áreas dos triângulos	
Triângulo	Área (m^2)
A12	815,79
A23	513,43
A34	759,21
A45	1097,35
A56	478,02
A16	367,55
B16	548,00
B56	697,70
B57	1304,63
B78	770,86
B18	672,30

A primeira etapa deste exercício é determinar as cotas dos pontos, para posterior cálculo do volume. Porém vamos diretamente calcular a cota de escavação de cada um dos pontos. Sabemos que o plano de referência encontra-se a 5,8 m abaixo do ponto A, então, para os desníveis obtidos a partir do ponto A, a cota de escavação será dada por:

$$he_i = \Delta h_{Ai} + 5{,}8 \text{ m}$$

Esta fórmula pode ser facilmente deduzida a partir da figura abaixo.

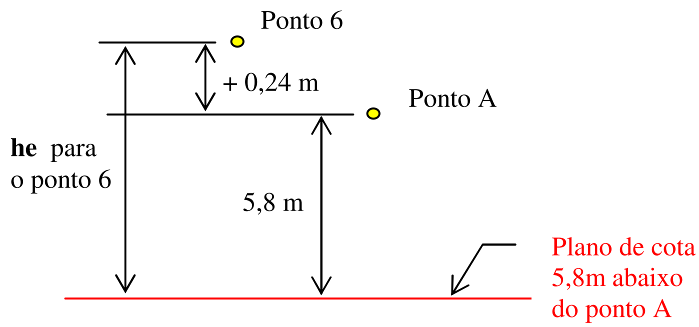


Figura 17 – Determinação da cota de escavação.

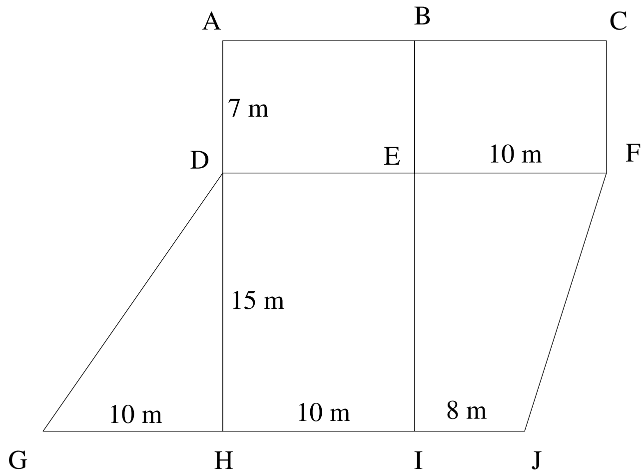
Conhecendo he para o ponto 6 podemos então calcular as cotas de escavação para o ponto B e em conseqüência para os pontos 7 e 8.

Ponto	he - Cota de Escavação (m)
1	0,56
2	0,87
3	1,08
4	0,77
5	0,45
6	6,04
7	0,17
8	0,11

Prisma	Área (m²)	Z1 (m)	Z2 (m)	Z3 (m)	média (m) (Z1+Z2+Z3)/3	Volume (m³)
A12	815,79	0,56	0,87	5,80	2,41	1966,05
A23	513,43	0,87	1,08	5,80	2,58	1326,36
A34	759,21	1,08	0,77	5,80	2,55	1935,99
A45	1097,35	0,77	0,45	5,80	2,34	2567,80
A56	478,02	0,45	6,04	5,80	4,10	1958,29
A16	367,55	6,04	0,56	5,80	4,13	1519,21
B16	548,00	0,56	6,04	5,42	4,01	2195,65
B56	697,70	6,04	0,45	5,42	3,97	2769,87
B57	1304,63	0,45	0,17	5,42	2,01	2626,66
B78	770,86	0,17	0,11	5,42	1,90	1464,63
B18	672,30	0,11	0,56	5,42	2,03	1364,77

Volume Total = 21695,27 m^3

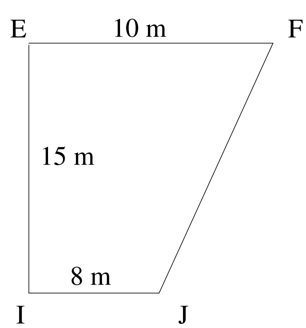
Exercício 14 - Calcular o volume de corte para a cota 32,0m para a malha irregular dada.

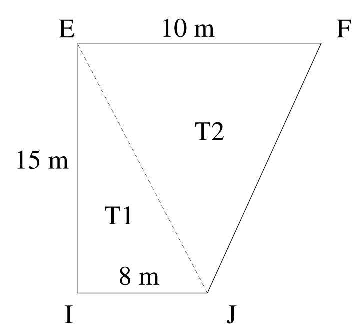


Ponto	Cota (m)
A	33,7
B	34,2
C	35,1
D	33,9
E	34,5
F	36,0
G	34,3
H	35,2
I	36,1
J	36,7

Ponto	Cota (m)	Cota – he (m)
A	33,7	1,7
B	34,2	2,2
C	35,1	3,1
D	33,9	1,9
E	34,5	2,5
F	36,0	4,0
G	34,3	2,3
H	35,2	3,2
I	36,1	4,1
J	36,7	4,7

Inicialmente devem ser calculadas as áreas das figuras para depois calcular os volumes. Neste ponto cabe fazer uma observação. Existe um trapézio formado pelos pontos EFIJ. Podemos calcular o volume de uma sólido trapezoidal, ou dividir a figura em dois sólidos triangulares. Porém os volumes que encontraremos não serão iguais nos dois casos, como pode ser visto nos cálculos abaixo. Se o terreno não apresentar uma declividade constante, a divisão do trapézio em dois triângulos nos dará um valor mais condizente com a realidade. Desta forma, neste exercício vamos fazer esta divisão.





Área do trapézio EFIJ = 135 m^2
Área do triângulo EIJ = 60 m^2
Área do triângulo EFJ = 75 m^2

Volume do prisma trapezoidal = 135. 3,825 = 516,375 m^3
Volume do prisma triangular T1 = 60 . 3,767 = 226,02 m^3

Volume do prisma triangular T2 = 75 . 3,733 = 279,975 m^3

$$T1 + T2 = 505,995\ m^3$$

Figura	Área (m^2)	Cota média (m)	Volume (m^3)
ABDE	70	2,075	145,25
ACEF	70	2,950	206,5
GHD	75	2,467	185,025
DEHI	150	2,925	438,75
EIJ	60	3,767	226,02
EFJ	75	3,733	279,975
		Volume Total =	**1481,52**

3.2. Método das Seções Transversais

A aplicação desta fórmula supõe seções planas paralelas entre si, espaçadas de uma distância “d” (figura 18). O volume será dado por:

$$\text{Volume} = d \cdot \left(\frac{A_1 + A_2}{2} \right)$$

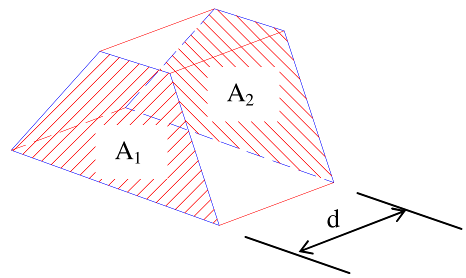


Figura 18 – Seções paralelas.

Esta fórmula é largamente empregada em estradas e ferrovias, nos cálculos de corte e aterro. Para uma mesma seção poderemos ter áreas de corte e aterro, que posteriormente significarão volumes de corte e aterro. A figura 19 ilustra esta questão.

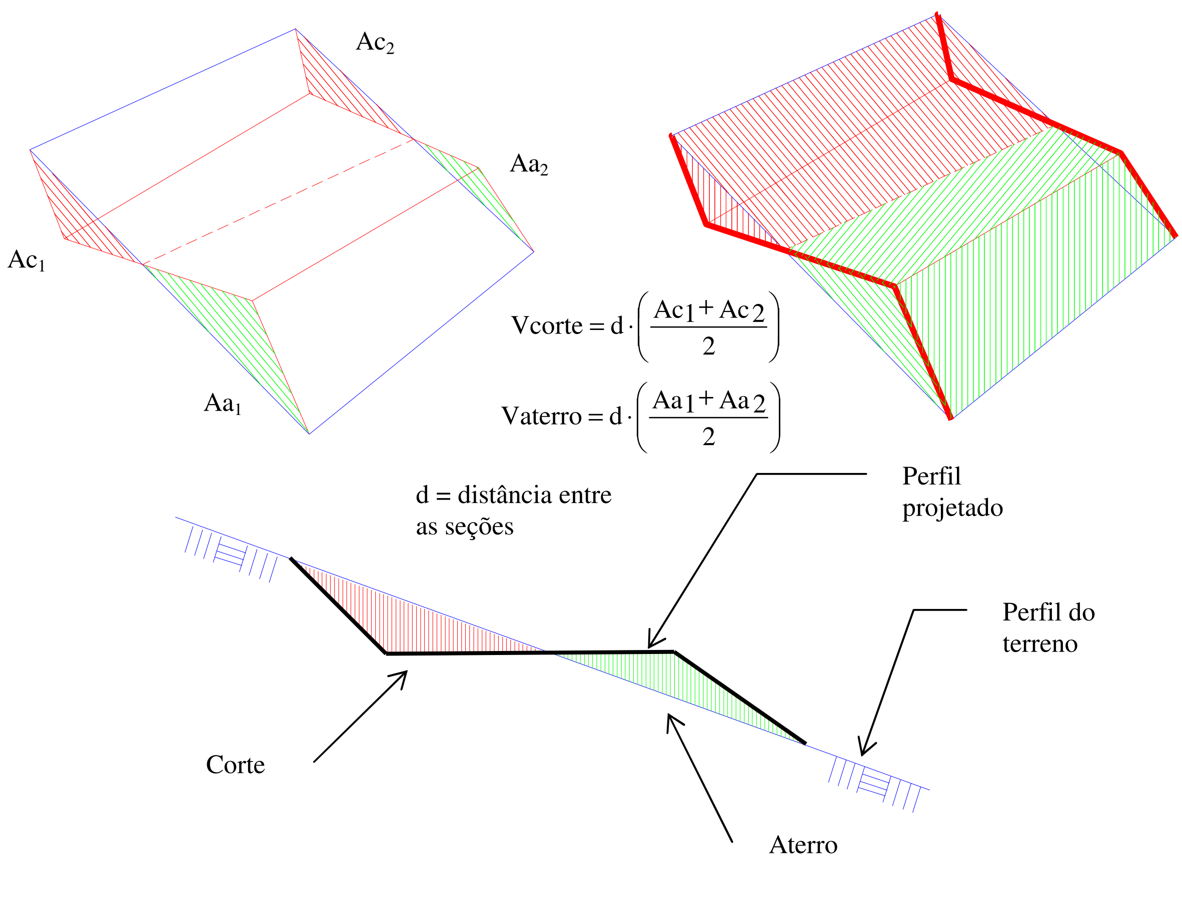
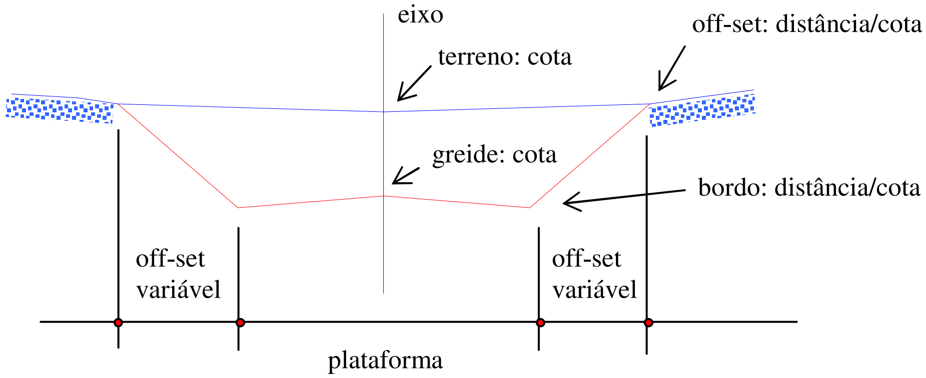


Figura 19 – Seções de corte e aterro.

O mais complicado e demorado deste método é o cálculo das áreas das seções transversais. A aplicação da fórmula em si é muito simples. Antes de partirmos para um exemplo de cálculo, vejamos a nomenclatura utilizada nas seções transversais a serem calculadas no próximo exercício, as quais são apresentadas na figura 20.



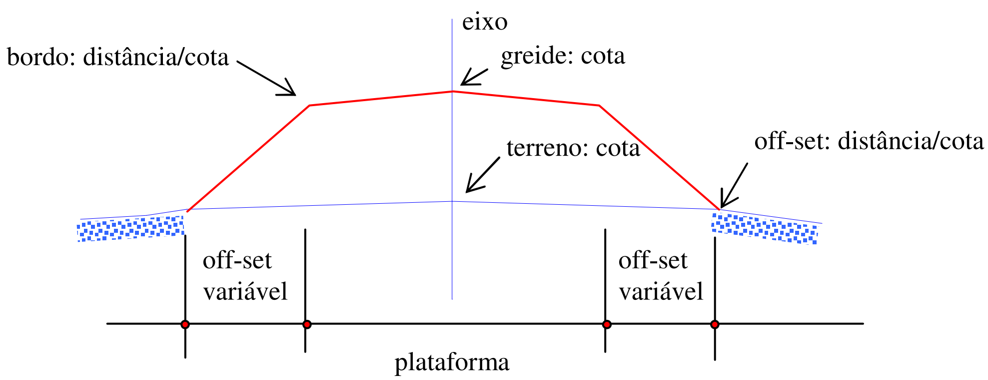


Figura 20 – Nomenclatura das seções transversais.

Exercício 15 – Dada a nota de serviço de terraplanagem, calcular o volume de corte e aterro. Este exercício esta baseado em dados retirados de um projeto verdadeiro de uma rodovia no interior o Estado do Paraná. Para fins práticos, vamos trabalhar somente com algumas estacas do projeto. A distância entre as estacas é de 20m.

NOTA DE SERVIÇO DE TERRAPLENAGEM													
EST.	ESQUERDA				EIXO				DIREITA				
	OFF-SET		BORDO		COTA				BORDO		OFF-SET		
	COTA	DIST.	COTA	DIST	TERRENO	GREIDE	VERMELHA		DIST.	COTA	DIST.	COTA
							ATERRO	CORTE				
647	627.98	5.50	627.98	5.50	627.81	628.14	0.33		5.50	627.98	5.50	627.98
648	627.99	5.60	627.89	5.50	627.78	628.05	0.32		5.50	627.59	5.70	627.76
649	622.99	5.60	627.81	5.50	627.90	627.97	0.28		5.50	627.81	5.70	628.01
650	627.74	5.50	627.74	5.50	627.75	627.90	0.15		5.50	627.74	5.90	628.14
651	628.19	6.00	627.49	5.50	627.96	627.85		0.11	5.50	627.79	6.10	628.29
652	627.53	5.70	627.66	5.50	627.84	627.82		0.02	5.50	627.66	6.10	628.26
653	628.74	6.60	627.64	5.50	627.81	627.80		0.01	5.50	627.64	6.10	628.24

A primeira etapa é o desenho (figura 21) e cálculo das áreas das seções transversais. Originalmente no projeto as plataformas apresentam uma inclinação de 3%. Com estes dados é possível desenhar, utilizando um programa como o AutoCAD por exemplo, cada uma das seções. Neste caso podemos também obter facilmente via CAD as áreas das seções transversais. Este foi o processo utilizado para a obtenção dos valores a serem empregados neste exercício. Cabe salientar que para os perfis elaborados, a escala vertical é 10 vezes maior que a horizontal para enfatizar os desníveis.

A partir dos perfis mostrados na figura 21, calculou-se para cada estaca, a área de corte e de aterro, as quais são resumidas na tabela abaixo.

Estaca	Corte (m^2)	Aterro (m^2)
647	-	2.7500
648	-	2.2275
649	1.4573	0.014
650	0.8947	0.5527
651	4.1085	-
652	2.3660	-
653	5.2650	-

Uma estrada nem sempre é uma linha reta e na maioria das vezes existem curvas no seu traçado. Quando vamos calcular o volume de corte e aterro, no caso específico de curvas, iremos trabalhar com seções transversais que não são paralelas. Existe uma forma de correção a ser aplicada nestes casos. Ao leitor que interessar, o assunto é detalhado em BORGES (1994).

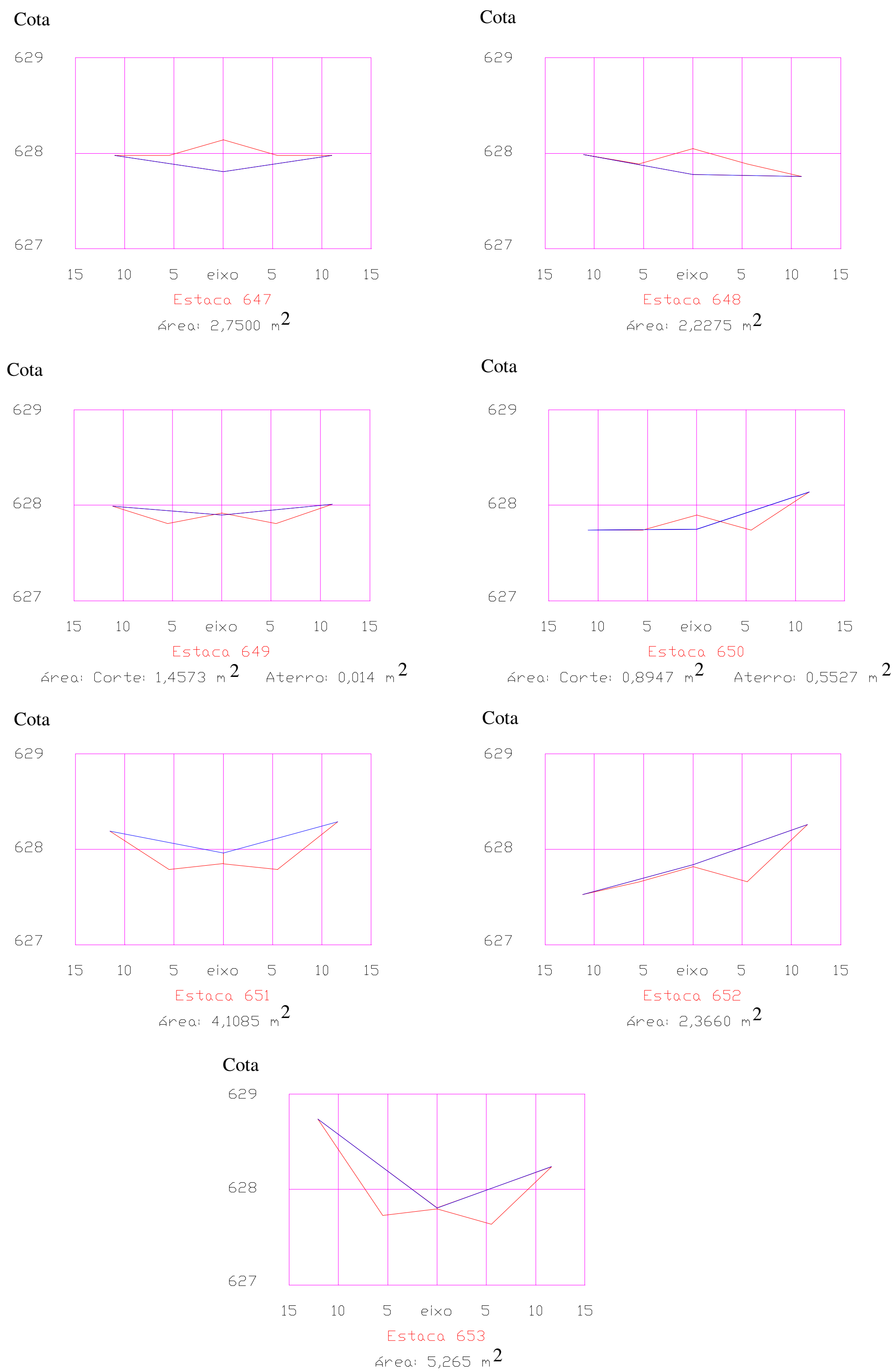


Figura 21 – Perfis transversais.

Vamos utilizar a planilha para cálculo de volumes por seções transversais para determinar os volumes de corte e de aterro. Uma cópia desta planilha é fornecida no anexo 1.

Cálculo do volume de Corte

Seções	**Áreas (m^2)**			**Distância entre as seções (m)**	**Volume (m^3)**
	Área	**Área Total**	**Média da Área**		
647	0				
		0	0	20	0
648	0				
		1.4573	0.7286	20	14.572
649	1.4573				
		2.3520	1.176	20	23.52
650	0.8947				
		5.0032	2.5016	20	50.032
651	4.1085				
		6.4745	3.2372	20	64.744
652	2.3660				
		7.6310	3.8155	20	76.31
653	5.2650				
				Volume Total	**229.178**

Cálculo do volume de Aterro

Seções	**Áreas (m^2)**			**Distância entre as seções (m)**	**Volume (m^3)**
	Área	**Área Total**	**Média da Área**		
647	2.75				
		4.9775	2.4887	20	49.774
648	2.2275				
		2.2415	1.1207	20	22.414
649	0.014				
		0.5667	0.2833	20	5.667
650	0.5527				
		0.5527	0.2763	20	5.527
651	0				
		0	0	20	0
652	0				
		0	0	20	0
653	0				
				Volume Total	**83,114**

3.3. Superfícies Eqüidistantes

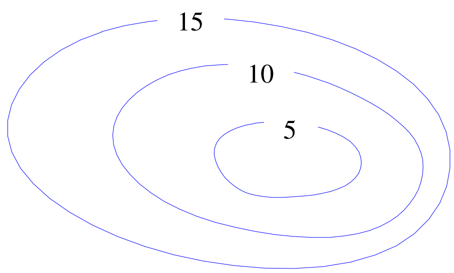
Alguns autores ainda apresentam uma metodologia de cálculo chamada de Superfícies Eqüidistantes, que na realidade segue o mesmo princípio do cálculo do método das seções transversais, porém agora ao invés de trabalharmos com seções verticais, utilizaremos seções horizontais. A fórmula para cálculo é a seguinte:

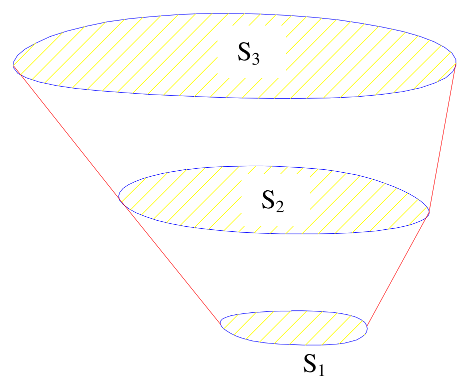
$$\text{Volume} = d \cdot \left(\frac{A_1}{2} + A_2 + A_3 + \ldots + A_{n-1} + \frac{A_n}{2} \right)$$

onde n é o número de seções.

Um exemplo de aplicação é o cálculo de volume d'água em reservatórios de barragens, onde as superfícies paralelas são representadas pelas curvas de nível. Vamos verificar a fórmula com o exercício abaixo.

Exercício 16 – Calcular para as curvas de nível dadas abaixo, o volume definido entre as curvas 5 e 15m.





O valor de "d" será a eqüidistância entre as curvas de nível.

$$V_{5/10} = d \cdot \left(\frac{S_1 + S_2}{2} \right)$$

$$V_{10/15} = d \cdot \left(\frac{S_2 + S_3}{2} \right)$$

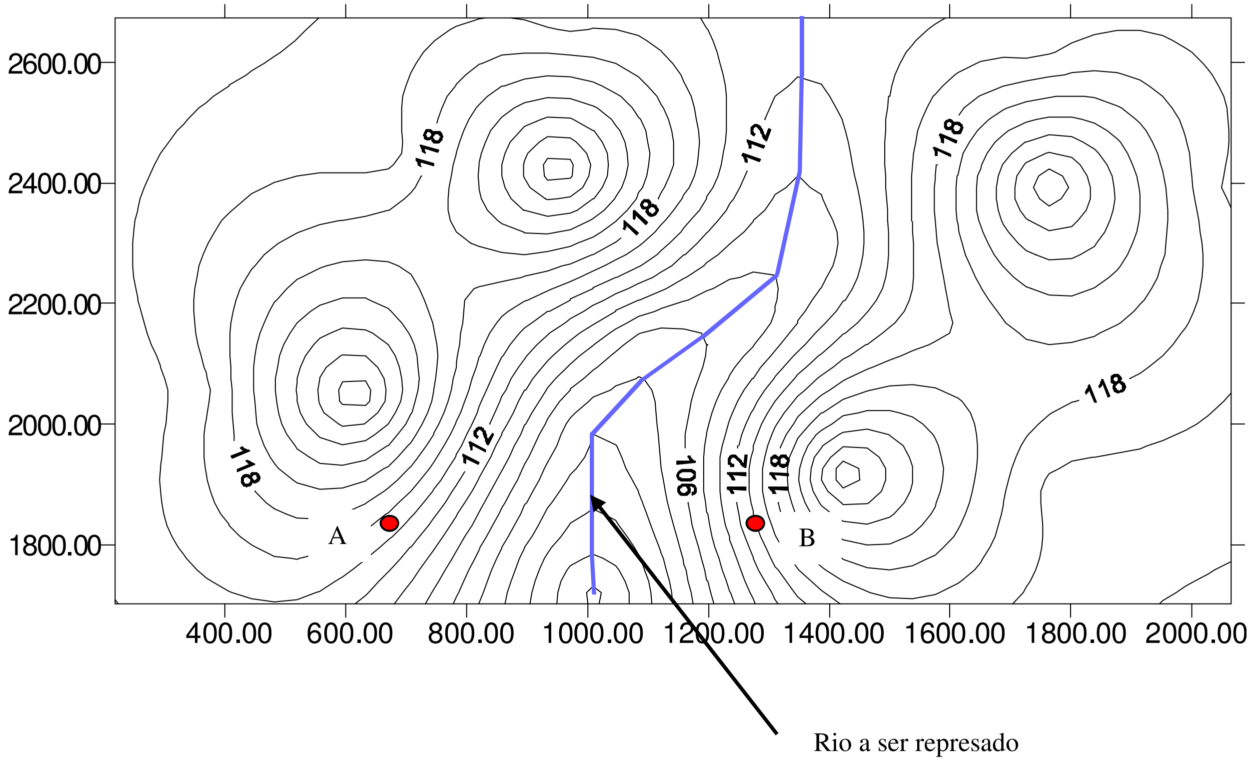
$$V_t = V_{5/10} + V_{10/15}$$

$$V_t = d \cdot \left(\frac{S_1 + S_2}{2} + \frac{S_2 + S_3}{2} \right)$$

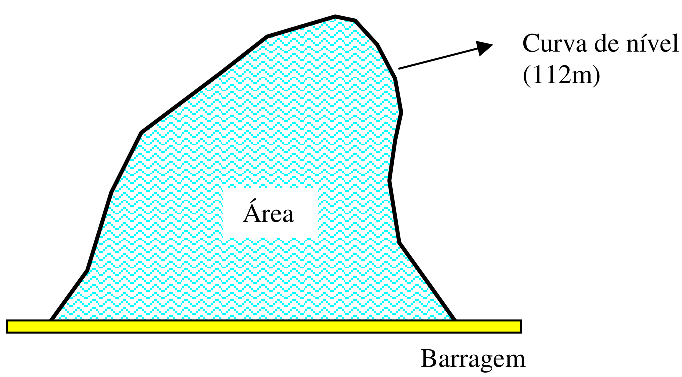
$$V_t = d \cdot \left(\frac{S_1 + 2S_2 + S_3}{2} \right)$$

$$V_t = d \cdot \left(\frac{S_1}{2} + S_2 + \frac{S_3}{2} \right)$$ confirmando a fórmula apresentada!

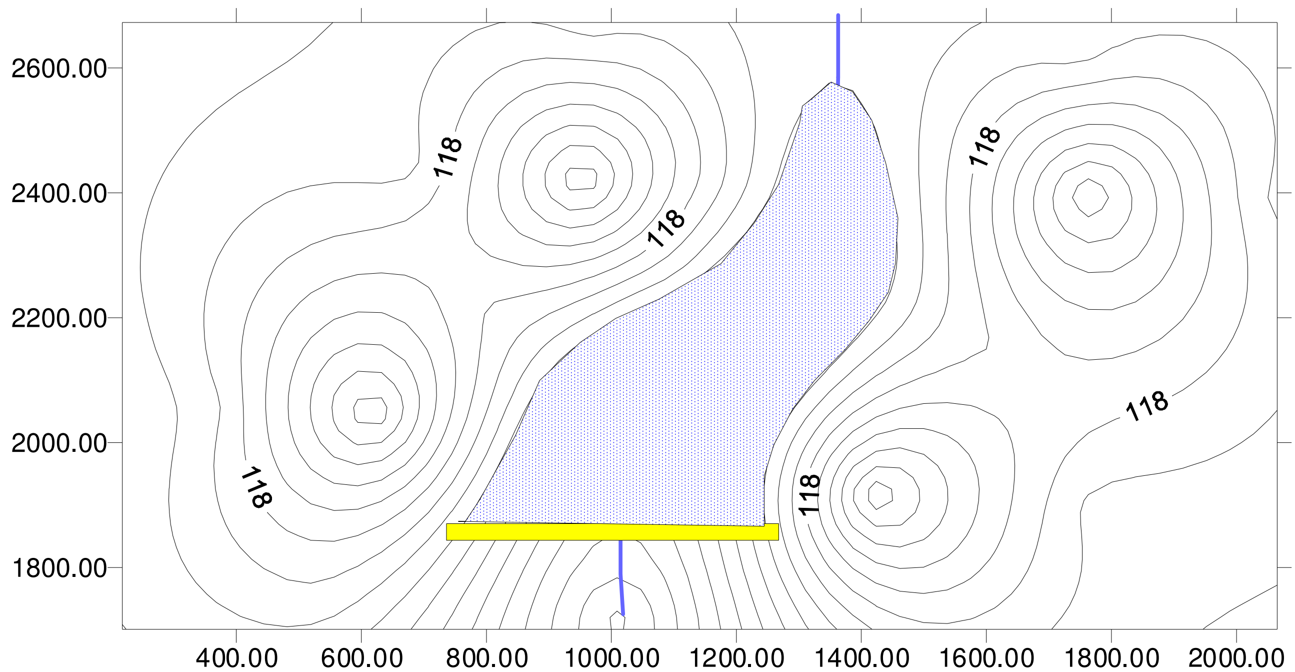
Exercício 17 -Foi projetada uma represa entre os pontos A e B, indicados no mapa abaixo. Sabendo que a cota de inundação será 112m, calcular o volume de água a ser represada pela barragem. As unidades do mapa estão em metros.



A primeira etapa é marcar a posição da barragen sobre o mapa. Sabendo-se que a cota de inundação é 112m, então tudo que estiver compreendido entre a curva de nível de cota 112m e abaixo desta cota será inundado. Para calcular o volume de inundação temos que determinar qual é a área que cada curva de nível define em relação a barragem.



Esta área pode ser determinada com planímetro ou utilizando-se algum programa CAD. A figura a seguir mostra a posição da barragem e a área a ser inundada.



Os valores das áreas, determinados via programa CAD, são mostrados na tabela abaixo.

Áreas	
Curva	Área (m^2)
112	243808,7
110	174185,7
108	117934,1
106	76370,9
104	42836,1
102	16650,9
100	1697,0

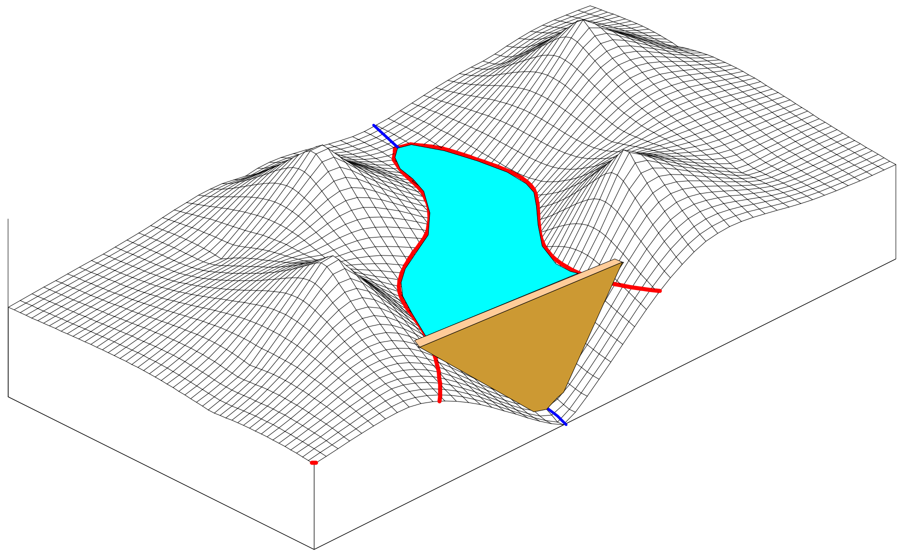
Aplicando-se o método das seções transversais, onde o espaçamento entre cada seção neste caso é a eqüidistância entre as curvas de nível (2 m), teremos:

$$V = e.\left(\frac{A_{112}}{2} + A_{110} + A_{108} + A_{106} + A_{104} + A_{102} + \frac{A_{100}}{2}\right)$$

$$V = 2.\left(\frac{243808{,}7}{2} + 174185{,}7 + 117934{,}1 + 76370{,}9 + 42836{,}1 + 16650{,}9 + \frac{1697{,}0}{2}\right)$$

$$V = 1101461{,}1\ m^3$$

A figura a seguir representa em 3D a área a ser represada.



3.4. Terraplenagem para plataformas

Esta será uma aplicação do método das seções transversais na área de terraplenagem. RICARDO; CATALANI (1977) definem a terraplenagem ou movimentos de terra, como o conjunto de operações necessárias para remover a terra, dos locais em que se encontra em excesso para aqueles em que há falta, tendo em vista um determinado projeto a ser executado. Diversos trabalhos de engenharia necessitam da utilização da terraplenagem, como a construção de rodovias, aeroportos, fábricas, ou mesmo a construção de uma residência. Como esta operação envolve a movimentação de terra, é necessário que conheçamos o volume de terra a ser trabalhado.

Neste item estaremos abordando uma forma de cálculo do volume de material a ser movimentado para a construção de plataformas horizontais e inclinadas. Logicamente que para calcular este volume teremos que conhecer previamente o terreno, ou seja, ter um levantamento topográfico do mesmo. Nos exemplos que se seguem o terreno foi quadriculado e as cotas dos pontos da malha foram determinadas por um método de nivelamento qualquer, cuja precisão deve ser compatível com as necessidades do usuário. O espaçamento entre os pontos da malha dependerá das características do terreno. Terrenos acidentados requerem uma malha com espaçamento menor.

De acordo com BORGES (1994, p.66), o projeto de terraplenagem poderá solicitar da topografia o planejamento para uma das quatro hipóteses:

1 – plano horizontal, sem a imposição de uma cota final
2 – plano final horizontal com a imposição de uma cota final
3 – plano inclinado sem a imposição da altura em que este plano deva estar.
4 – plano inclinado impondo uma determinada altura para o mesmo, através da escolha da cota de um determinado ponto.

Vamos mostrar um exemplo de cálculo. Este exemplo estará baseado nos dados apresentados por BORGES (1994 – p.67). Inicialmente é dada uma malha de pontos com as suas respectivas cotas. O espaçamento da malha é de 20 m.

	1	2	3	4	5
A	36,3	34,8	33,5	32,2	30,8
B	36,4	34,9	33,6	32,3	32,1
C	36,6	35,5	34,4	33,5	32,9
D	37,2	36,3	35,8	35,1	33,9

Figura 22 – Malha de pontos

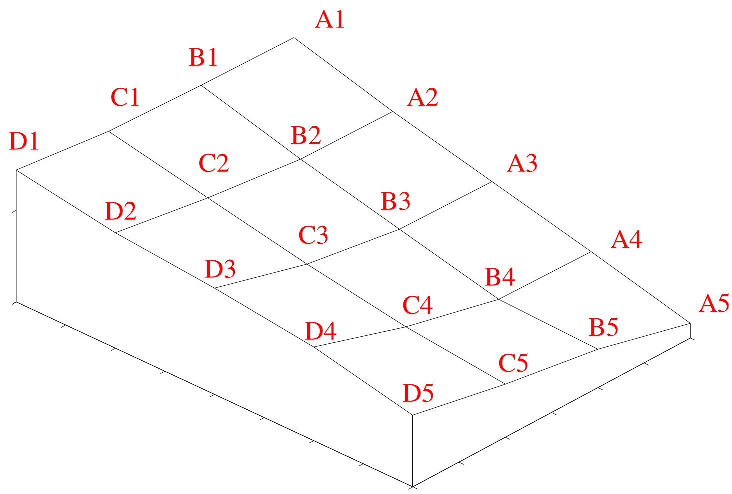


Figura 23 – Vista em perspectiva da malha.

Hipótese 01

Neste caso a topografia poderá escolher uma altura do plano final. Assim vamos escolher uma altura em que o volume de corte seja igual ao volume de aterro, compensando a movimentação de terra. A primeira coisa a fazer é determinar a cota de passagem para a malha dada, que pode ser determinada conforme visto anteriormente, através do cálculo da média ponderada das cotas da malha. Os cálculos são apresentados a seguir.

Ponto	Cota	Peso	Peso x Cota
A1	36.3	1	36.3
A2	34.8	2	69.6
A3	33.5	2	67.0
A4	32.2	2	64.4
A5	30.8	1	30.8
B1	36.4	2	72.8
B2	34.9	4	139.6
B3	33.6	4	134.4
B4	32.3	4	129.2
B5	32.1	2	64.2
C1	36.6	2	73.2
C2	35.5	4	142.0
C3	34.4	4	137.6
C4	33.5	4	134.0
C5	32.9	2	65.8
D1	37.2	1	37.2
D2	36.3	2	72.6
D3	35.8	2	71.6
D4	35.1	2	70.2
D5	33.9	1	33.9
	Σ	48	1646.4

$$Cp = \frac{\sum Cota \cdot Peso}{\sum Pesos}$$

$$Cp = \frac{1646{,}40}{48}$$

$$Cp = 34{,}3 \text{ m}$$

Então se utilizarmos um plano de referência com cota 34,3 m, o volume de corte será igual ao volume de aterro. Passamos então para o cálculo do volume de corte e aterro. Utilizaremos o método das seções transversais. Serão trabalhadas as seções A, B, C e D. O primeiro passo é construir o perfil da seção que iremos trabalhar. Neste perfil devem constar o perfil do terreno e a indicação do plano final em que o terreno ficará após a terraplenagem. Todas as medidas estarão representadas em metros.

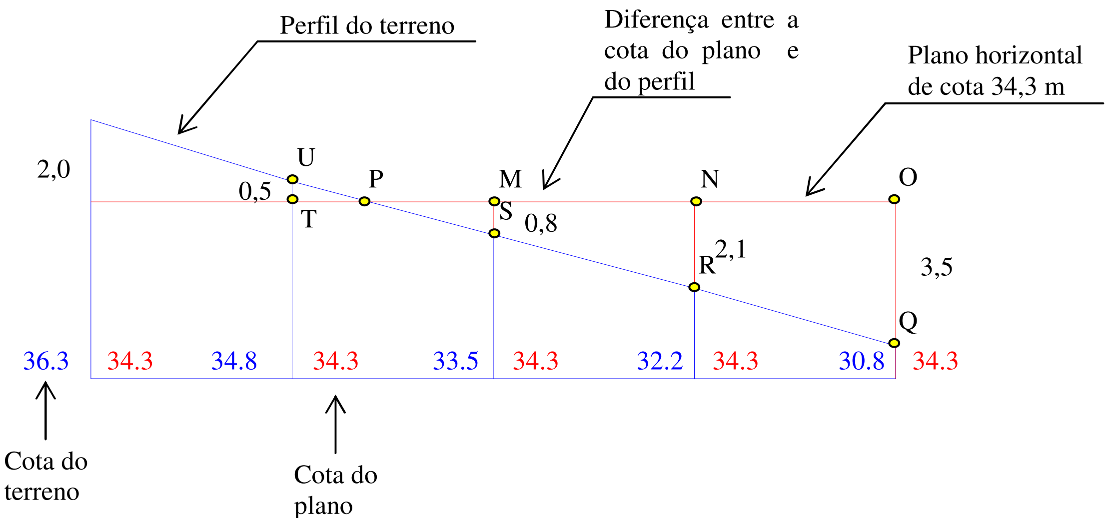


Figura 24 – Perfil "A" do terreno.

Teremos então que calcular as áreas de corte e aterro para a seção acima. Por exemplo, para calcularmos a área de aterro total para a seção apresentada basta somarmos as áreas do triângulo PMS, trapézio MNRS e trapézio NOQR. Não nos esqueçamos que a abertura da malha é de 20 m, ou seja, a distância entre os pontos MN é de 20m e assim por diante. Porém teremos que calcular por interpolação a distância PM, para podermos calcular a área do triângulo PMS.

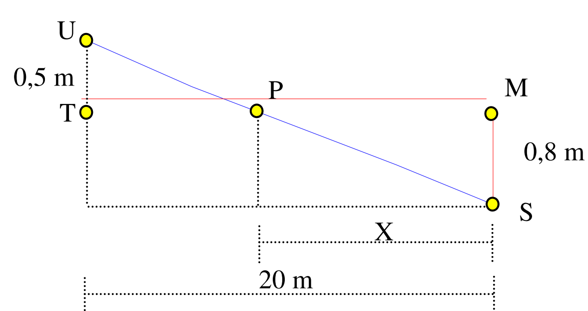


Figura 25 – Interpolação.

Se em vinte metros (distância TM) o terreno sobe 1,3 m (desnível SU), em "X" metros (distância MP) o terreno sobre 0,8 m (desnível MS). Basta resolver por regra de três.

$$20\text{m} \rightarrow 1{,}3\text{m}$$
$$X\text{m} \rightarrow 0{,}8\text{m}$$

$$X = \frac{20 \cdot 0{,}8}{1{,}3}$$

$$X = 12{,}31 \text{ m}$$

A representação final do perfil da seção A é mostrada a seguir.

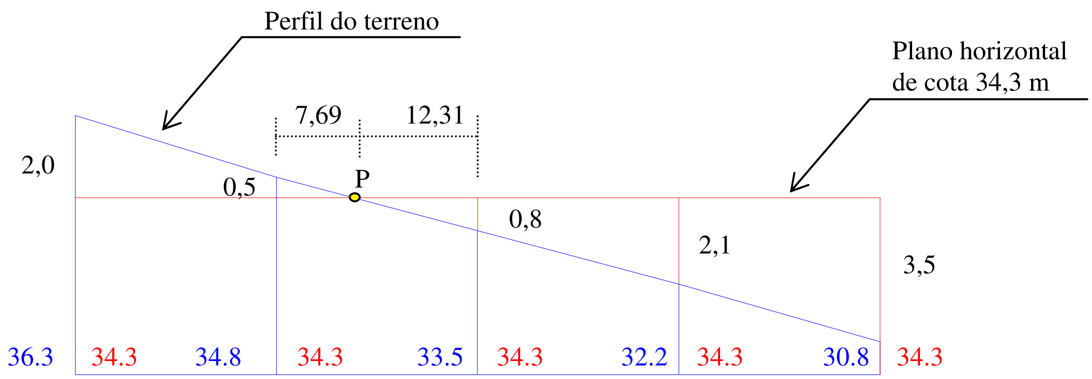


Figura 26 – Perfil seção A.

Cálculo da área de aterro da seção A (S_{AA}):

$$S_{AA} = \frac{12{,}31 \cdot 0{,}8}{2} + \frac{20 \cdot (2{,}1 + 0{,}8)}{2} + \frac{20 \cdot (3{,}5 + 2{,}1)}{2}$$

$$S_{AA} = 89{,}9240 \text{ m}^2$$

Cálculo da área de corte da seção A (S_{CA}):

$$S_{CA} = \frac{20 \cdot (2{,}0 + 0{,}5)}{2} + \frac{7{,}69 \cdot 0{,}5}{2}$$

$$S_{CA} = 26{,}9225 \text{ m}^2$$

Para todas as outras seções vamos fazer o mesmo procedimento. Não vamos apresentar os cálculos, os quais podem ser facilmente verificados pelos alunos, mas tão somente as seções e os resultados.

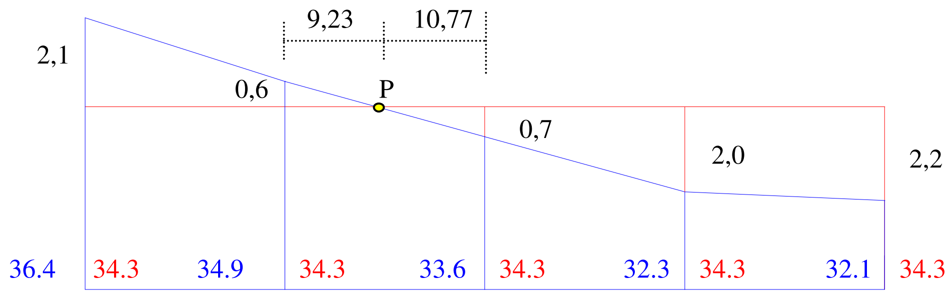


Figura 27 – Perfil seção B.

Área de aterro da seção B (S_{AB}):

$$S_{AB} = 72{,}7695\ m^2$$

Área de corte da seção B (S_{CB}):

$$S_{CB} = 29{,}769\ m^2$$

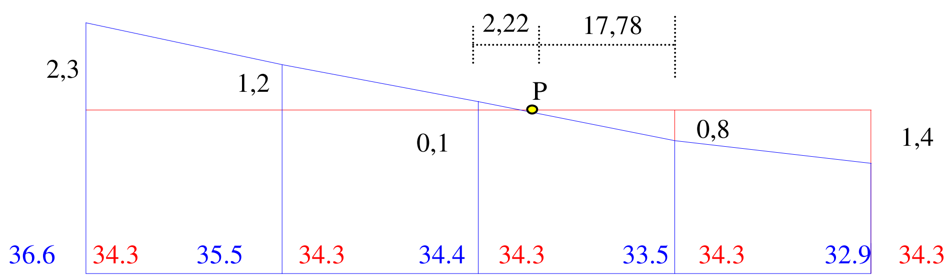


Figura 28 – Perfil seção C.

Área de aterro da seção C (S_{AC}):

$$S_{AC} = 29{,}1120\ m^2$$

Área de corte da seção C (S_{CC}):

$$S_{CC} = 48{,}1110\ m^2$$

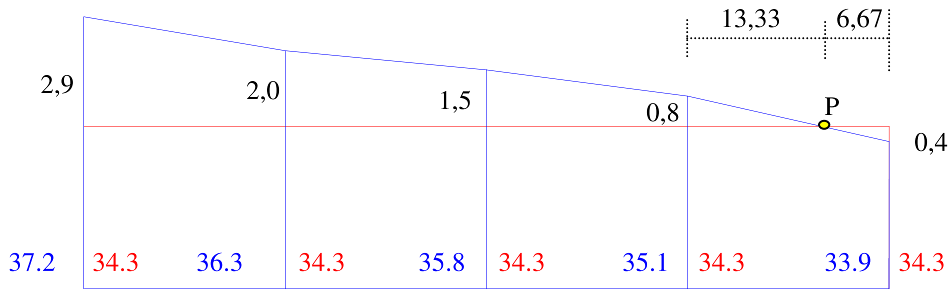


Figura 29 – Perfil seção D.

Área de aterro da seção D (S_{AD}):

$$S_{AD} = 1{,}3340 \text{ m}^2$$

Área de corte da seção D (S_{CD}):

$$S_{CD} = 112{,}332 \text{ m}^2$$

Tendo todas as áreas de corte e aterro calculadas podemos então calcular o volume final de corte e aterro. Começaremos pelo volume de aterro. O valor de "d" na fórmula é a distância entre duas seções consecutivas.

$$V_{Aterro} = 2950{,}210 \text{ m}^3$$

O volume de corte será dado por:

$$V_{corte} = 2950{,}145 \text{ m}^3$$

Como era de se esperar o volume de corte e de aterro foram praticamente iguais. A diferença de 0,065 m^3 encontrada deve-se a questões de arredondamento e na prática seria insignificante.

A figura seguir representa graficamente o que foi feito. Primeiro tínhamos o terreno natural (figura 30-a). Foi então calculada a cota de passagem. Na figura 30-b está representada a curva com valor da cota de passagem. Calculamos então um volume de corte (figura 30-c) e um de aterro (figura 30-d) para esta cota. Após realizados os trabalhos de terraplenagem o terreno ficaria plano (figura 30-e), estando na cota 34,3m.

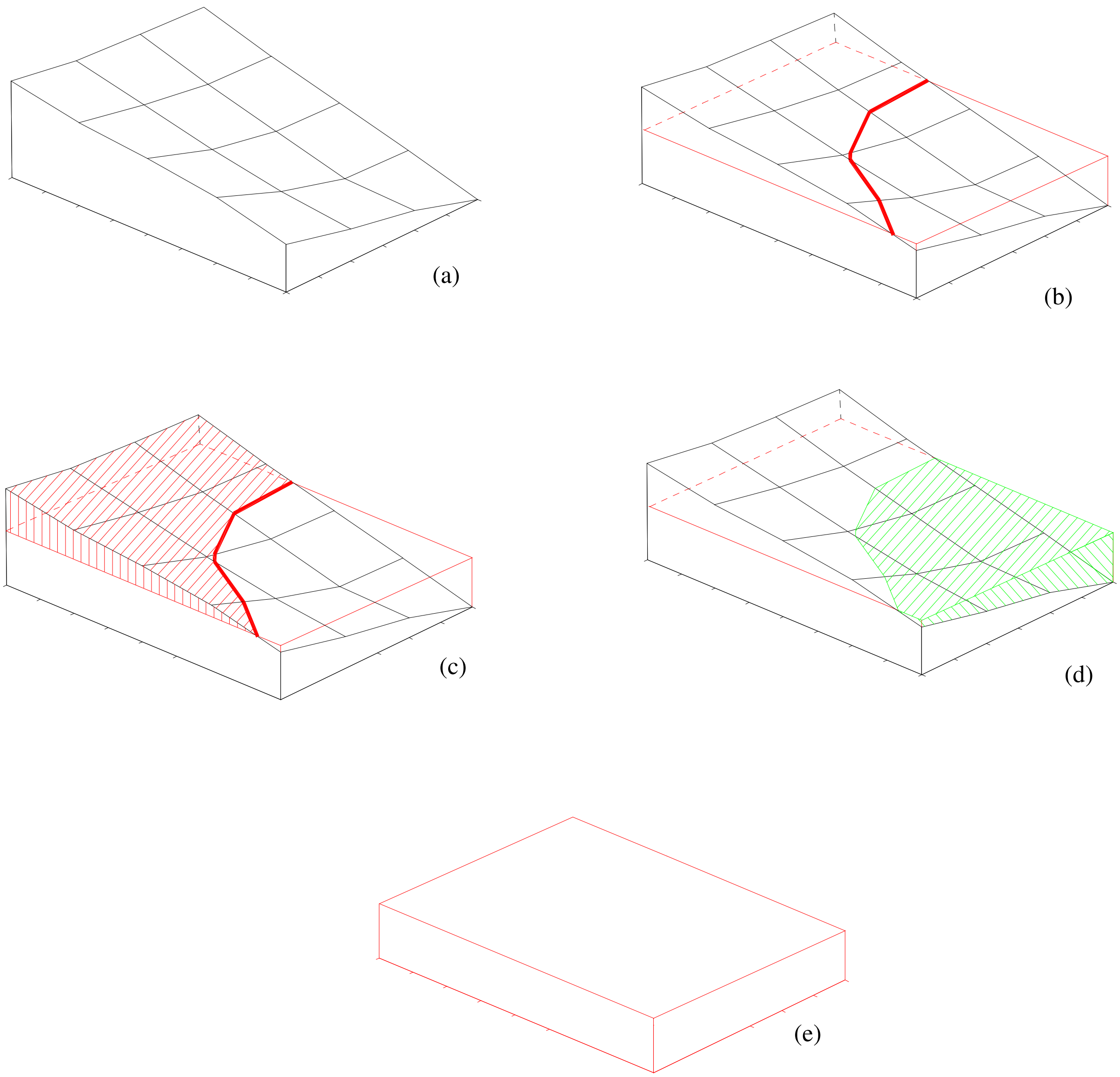


Figura 30 – Representação esquemática da hipótese 1.

Hipótese 02

O projeto de terraplenagem define um plano horizontal com uma cota dada qualquer. Os cálculos são feitos da mesma forma que no exemplo anterior, somente que agora o plano vai estar numa cota pré determinada. Supondo que para o terreno do exemplo anterior o projeto solicite um plano horizontal na cota 34,0 m. De antemão, em função dos dados do exemplo anterior, podemos calcular a diferença entre o volume de corte e aterro para este caso. Temos nosso terreno plano na cota 34,3 m. Se queremos então deixá-lo na cota 34,0 m significa que teremos que rebaixar o terreno 0,30m. Como a área do terreno é conhecida (60 x 80m), podemos então calcular o volume de material que deverá ser retirado. Basta multiplicar a área do terreno pela altura de rebaixamento.

$$\text{Volume} = 0.30\text{m} \cdot 4800\ \text{m}^2$$

$$\text{Volume} = 1440\ \text{m}^3$$

Então quando fizermos os cálculo para este exemplo veremos que a diferença entre os volumes de corte e aterro será de 1440 m^3. Fazendo os cálculos encontramos um volume de corte igual a 3730,265 m^3 e um volume de aterro de 2290,210 m^3. A diferença entre os dois é de 1440,055 m^3, bem próxima do calculado. A figura a seguir ilustra este raciocínio.

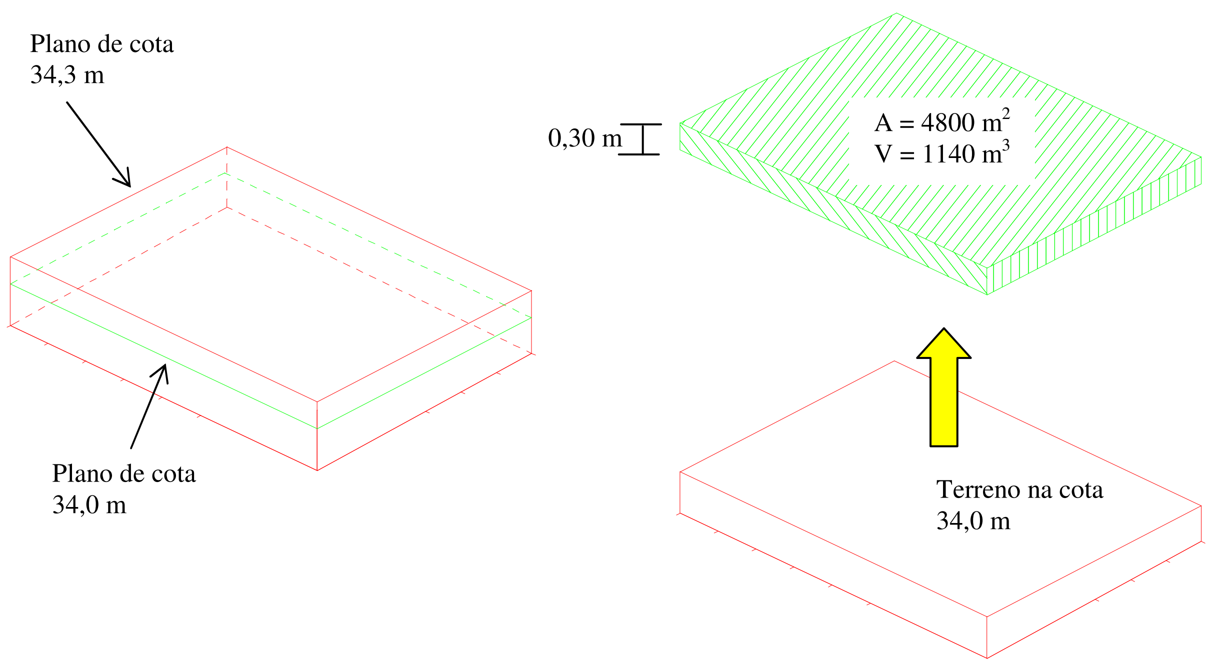


Figura 31 – Representação esquemática da hipótese 2.

Hipótese 03

O projeto solicita um plano inclinado na direção 1-5, com inclinação de 1%, sem determinar a altura do plano. Vamos então posicionar o plano inclinado de forma que a altura do mesmo, na linha média do terreno, seja igual à altura do plano que foi calculado para a hipótese 01. Desta forma teremos também para o plano inclinado, volumes de corte e aterro iguais.

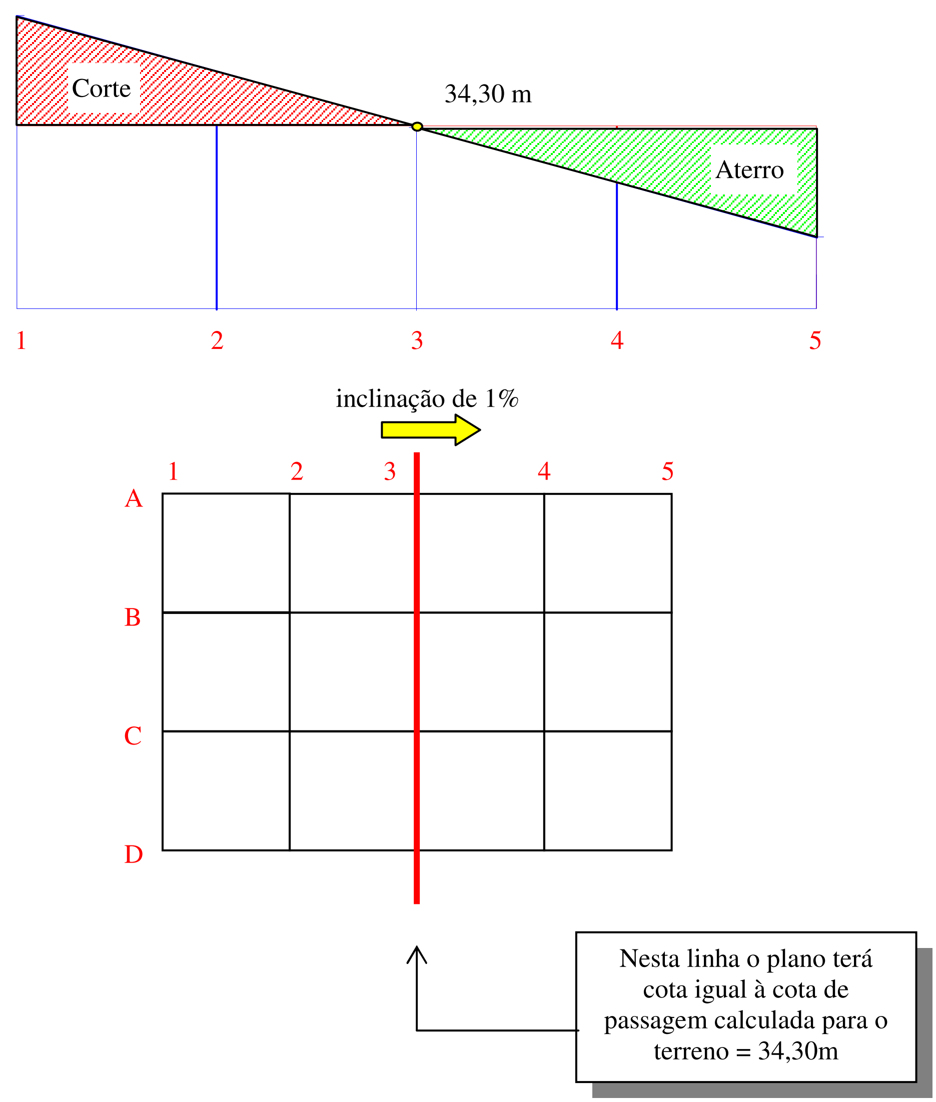


Figura 32 – Posicionamento do plano na hipótese 03.

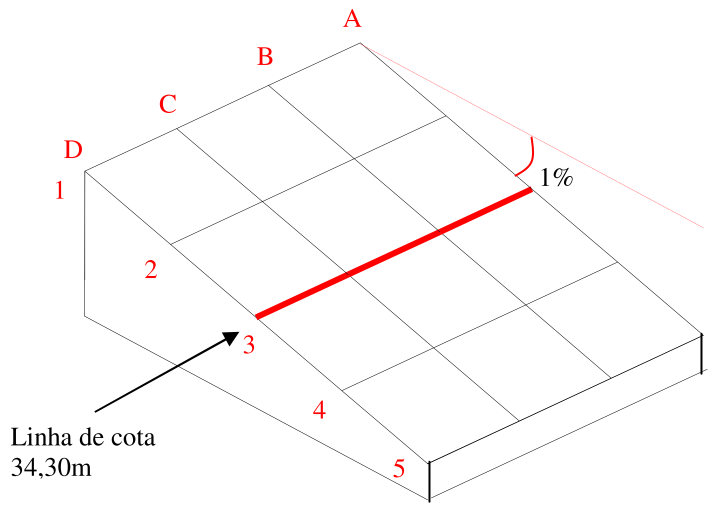


Figura 33 – Representação em perspectiva do plano da hipótese 03.

Determinada a posição do plano necessitamos calcular as demais cotas dos pontos do plano inclinado, para depois podermos desenhar os perfis transversais e calcular as áreas de corte e aterro. O plano terá uma inclinação de 1%, ou seja, para cada 100m o terreno "sobe" ou "desce" 1m. Em 20 m (tamanho da abertura da malha) o terreno então vai variar a sua cota em 0,20m. Como conhecemos a cota da linha 3 (34,30m), para calcular a cota das demais linhas basta somar ou diminuir 0,20m, conforme o sentido de inclinação do plano. Uma vez que a inclinação se dá no sentido X da malha, todos os pontos localizados na linha 1 terão a mesma cota, sendo o mesmo válido para as linhas 2, 3, 4 e 5.

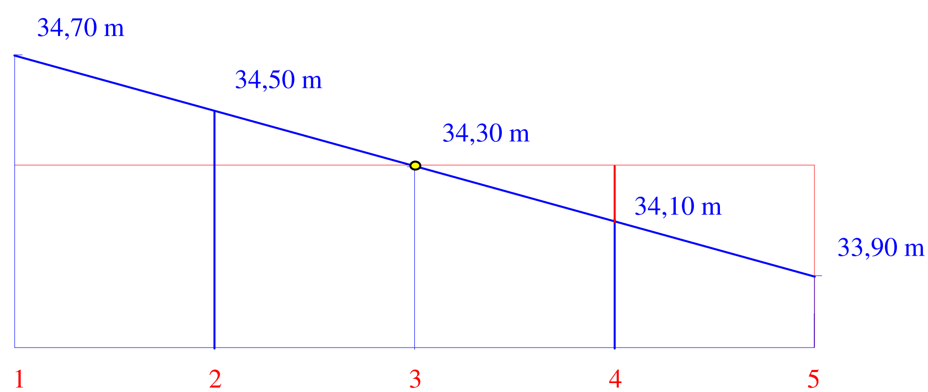


Figura 34 – Perfil transversal do plano inclinado.

Calculadas as cotas dos pontos do plano inclinado podemos esquematizar os perfis, conforme visto na hipótese 01 e calcular as áreas de corte e aterro. Será apresentado a seguir como realizar a interpolação do ponto P (interseção entre o plano inclinado e o terreno).

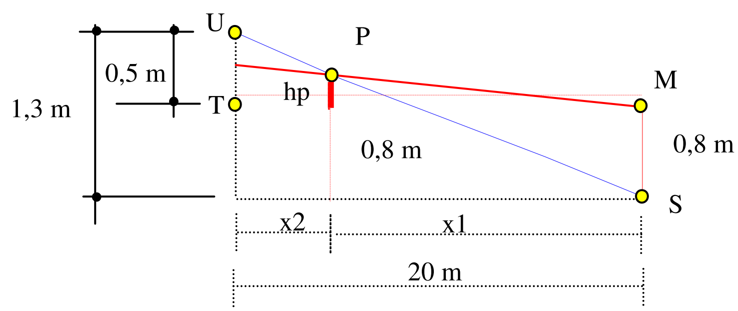


Figura 35 – Interpolação do ponto P para o plano inclinado.

Nesta interpolação não podermos obter o valor de x1 e x2 diretamente. Teremos que efetuar os cálculos por partes. Iniciaremos determinando o valor de x1. Sabemos que em 100m o terreno sobe 1m, então em x1 metros o terreno subirá “hp” metros. Como não conhecemos este valor teremos uma primeira equação em função de x1 e hp.

$$\begin{array}{ccc} 100\text{m} & \rightarrow & 1\text{m} \\ \text{x1} & \rightarrow & \text{hp} \end{array}$$

$$\text{x1} = \text{hp} \cdot 100 \quad (1)$$

Podemos escrever uma outra equação em função de x1. Sabe-se que do ponto S até o ponto U (distantes 20m) o terreno sobe 1,3 m, então em x1 metros o terreno subirá 0,8m + hp.

$$\begin{array}{ccc} 20\text{m} & \rightarrow & 1{,}3\text{m} \\ \text{x1} & \rightarrow & 0{,}8\text{m} + \text{hp} \end{array}$$

$$\text{x1} = \frac{20 \cdot (0{,}8 + \text{hp})}{1{,}3}$$

$$\text{x1} = \frac{16 + 20.\text{hp}}{1{,}3} \qquad (2)$$

Agora podemos igualar as equações (1) e (2) e obteremos o valor de hp:

$$\text{hp}.100 = \frac{16 + 20.\text{hp}}{1{,}3}$$

$$130.\text{hp} = 16 + 20.\text{hp}$$

$$\text{hp} = 0{,}145454$$
$$\text{hp} = 0{,}145 \text{ m}$$

Uma vez obtido o valor de hp, podemos substituí-lo tanto na equação (1) como na (2) para obter o valor de x1. O valor de x2 será igual ao valor da abertura da malha (20 m) menos o valor de x1.

$$x1 = hp.100$$

$$x1 = 14,55 \text{ m}$$

$$x2 = 20 - x1$$

$$x2 = 5,45 \text{ m}$$

Não vamos detalhar o procedimento de cálculo, o qual pode ser encontrado em BORGES (1994), uma vez que segue o mesmo princípio exposto na hipótese 01. A figura seguir representa graficamente o que foi feito.

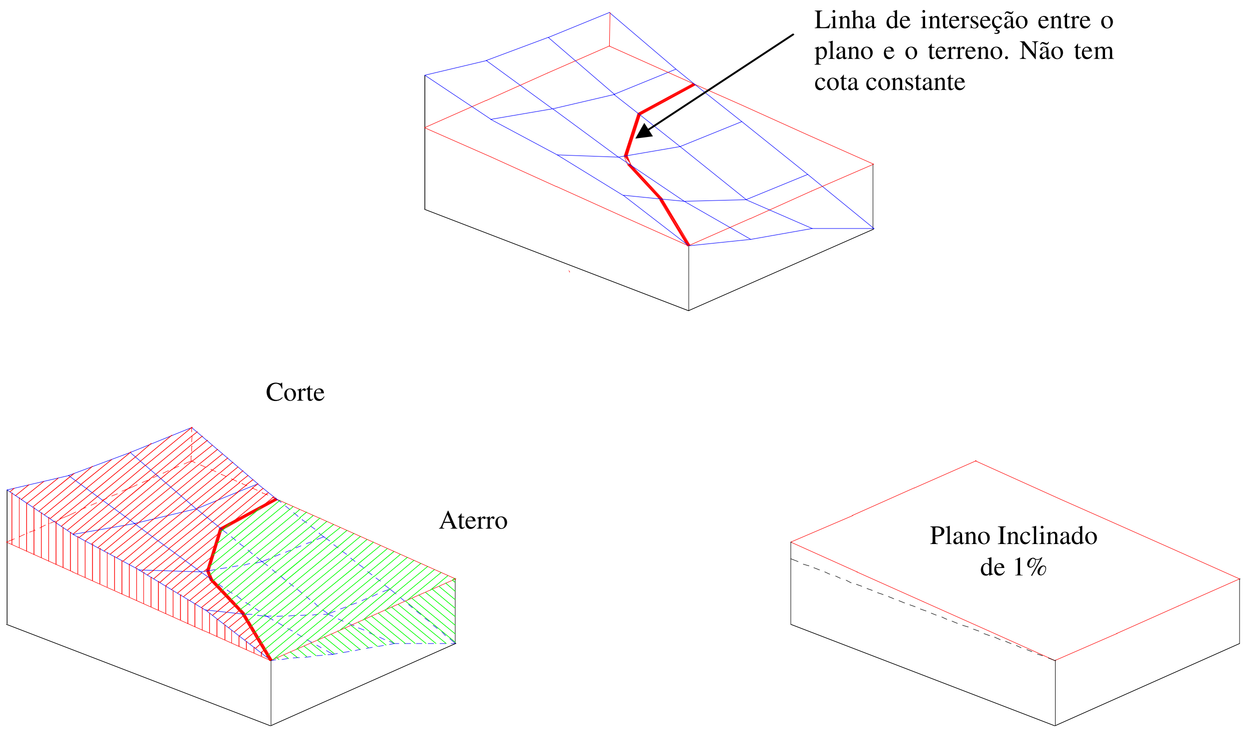


Figura 36 – Esquema do plano inclinado de 1%.

A hipótese 04 também segue a mesma linha de raciocínio apresentada, somente que agora será imposta uma cota de um ponto para o plano inclinado. BORGES (1994) apresenta um exemplo para este caso, com uma plano tendo uma inclinação de 2% em uma direção e 1% na outra.

Adicionalmente a estas seções poderiam ser introduzidos taludes de corte e aterro. O procedimento de cálculo do volume transcorreria da mesma forma, somente que agora teríamos que levar em consideração estes elementos.

Empolamento: pode ser definido como o aumento do volume sofrido por um material ao ser removido do seu estado natural. É geralmente expresso como a percentagem do aumento de volume sofrido em relação ao volume original (aumento do índice de vazios) (GARCIA; PIEDADE 1984). O coeficiente de empolamento da terra comum seca é de 25%, ou seja, um metro cúbico de terra seca no estado natural, ocupará após escavada um espaço de 1,25 m^3 no estado solto. A tabela abaixo apresenta alguns valores de coeficiente de empolamento.

Tabela 1 – Coeficientes de empolamento*

Material	Empolamento (%)
argila	40
terra comum – seca	25
terra comum – molhada	25
calcário	67
areia, molhada, compacta	12
areia, seca, solta	12

* adaptada de GARCIA; PIEDADE (1984).

4 - Bibliografia

BANNISTER, A.; BAKER, R. Solving problems in Surveying. 2 ed. Longman Scientific & Technical, London, 1994.

BEZERRA, M. J. **Curso de Matemática**. 25 ed. Companhia Editora Nacional, São Paulo, 1970. 629 p.

BORGES, A. C. **Topografia aplicada à Engenharia Civil**. v. 2. Editora Edgard Blucher. São Paulo, 1994. 232p.

BORGES, A. C. **Topografia aplicada à Engenharia Civil**. v. 1. Editora Edgard Blucher. São Paulo, 1977. 187p.

BORGES, A. C. **Exercícios de Topografia**. 3 ed. Editora Edgard Blucher. São Paulo, 1975. 192p.

CARVALHO, M. P. **Curso de estradas: estudos, projetos e locação de ferrovias e rodovias**. v.1. Científica, Rio de Janeiro, 1973. 510 p.

CHURCH, H. K. **Excavation Handbook**. McGraw-Hill, New York, 1981.

FERNANDEZ, V. P.; Youssef, A. N. **Matemática para o 2º grau**. Scipione, São Paulo, 1991. 424p.

GARCIA, G. J.; PIEDADE, G. C. R. **Topografia aplicada às ciências agrárias**. 5 ed. Nobil, São Paulo, 1984.

IMSS. **IMSS Catalogo Multimediale – Biografia Bonaventura Cavalieri**. Disponível em: <http://galileo.imss.firenze.it/museo/b/icavali.html> Acesso em: 01 mar. 2002.

IRVINE, W. **Surveying for construction**. 2 ed. McGraw-Hill, London, s.d.

KAVANAGH, B. F.; BIRD, S. J. G. **Surveying: Principles and applications**. 4 ed. Prentice Hall, 1996. 700p.

LIMA, E. L. **Fundamentos da Matemática elementar: Áreas e volumes.** Ao Livro Técnico, 1975. 75p.

RICARDO, H. S; CATALANI, G. **Manual prático de escavação**. McGraw-Hill, São Paulo, s.d.

MCCORMAC, J. **Surveying**. 4 ed. Prentice Hall, Columbus, 1999.

Exercícios