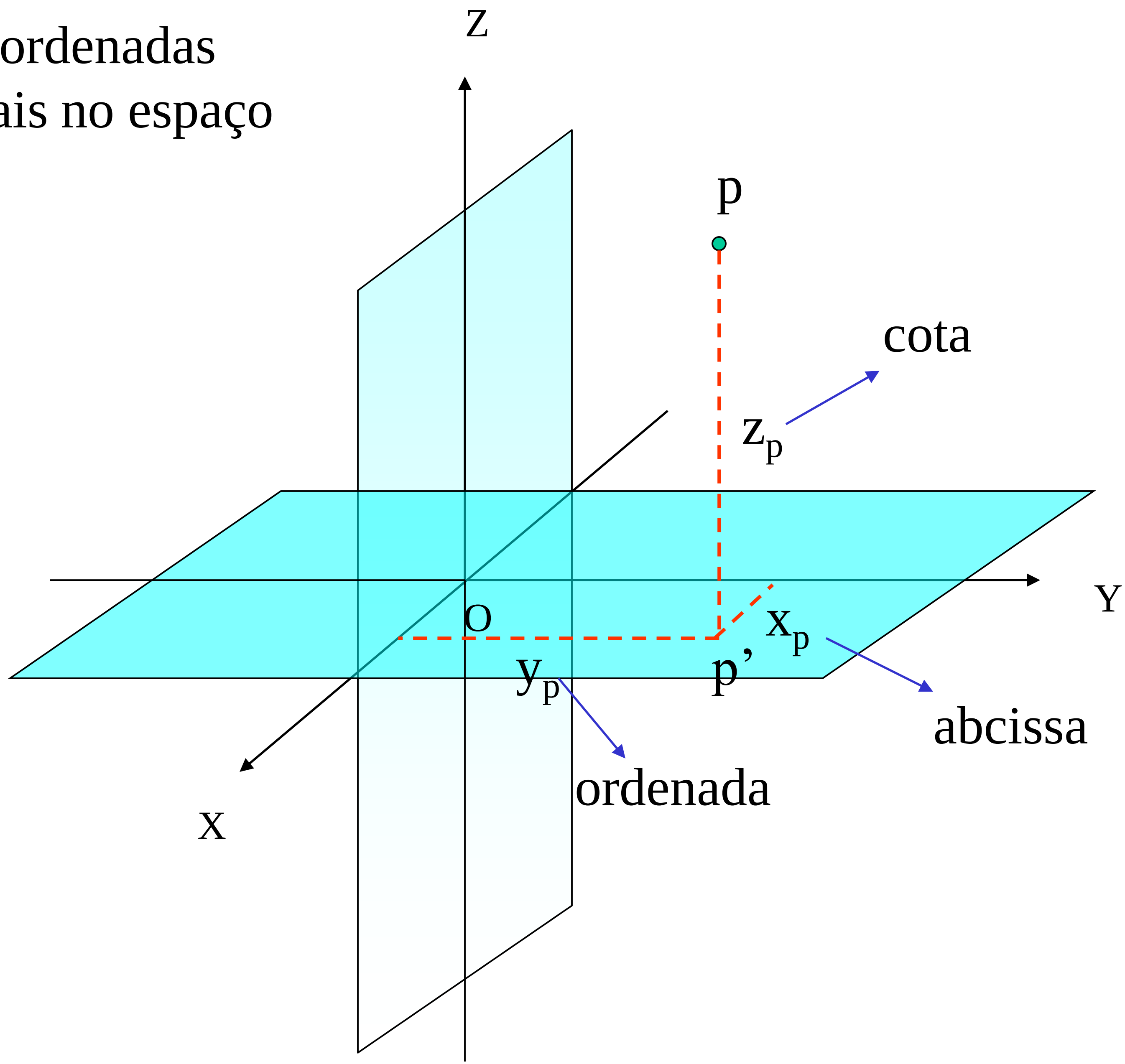
Sistemas de coordenadas tridimensionais

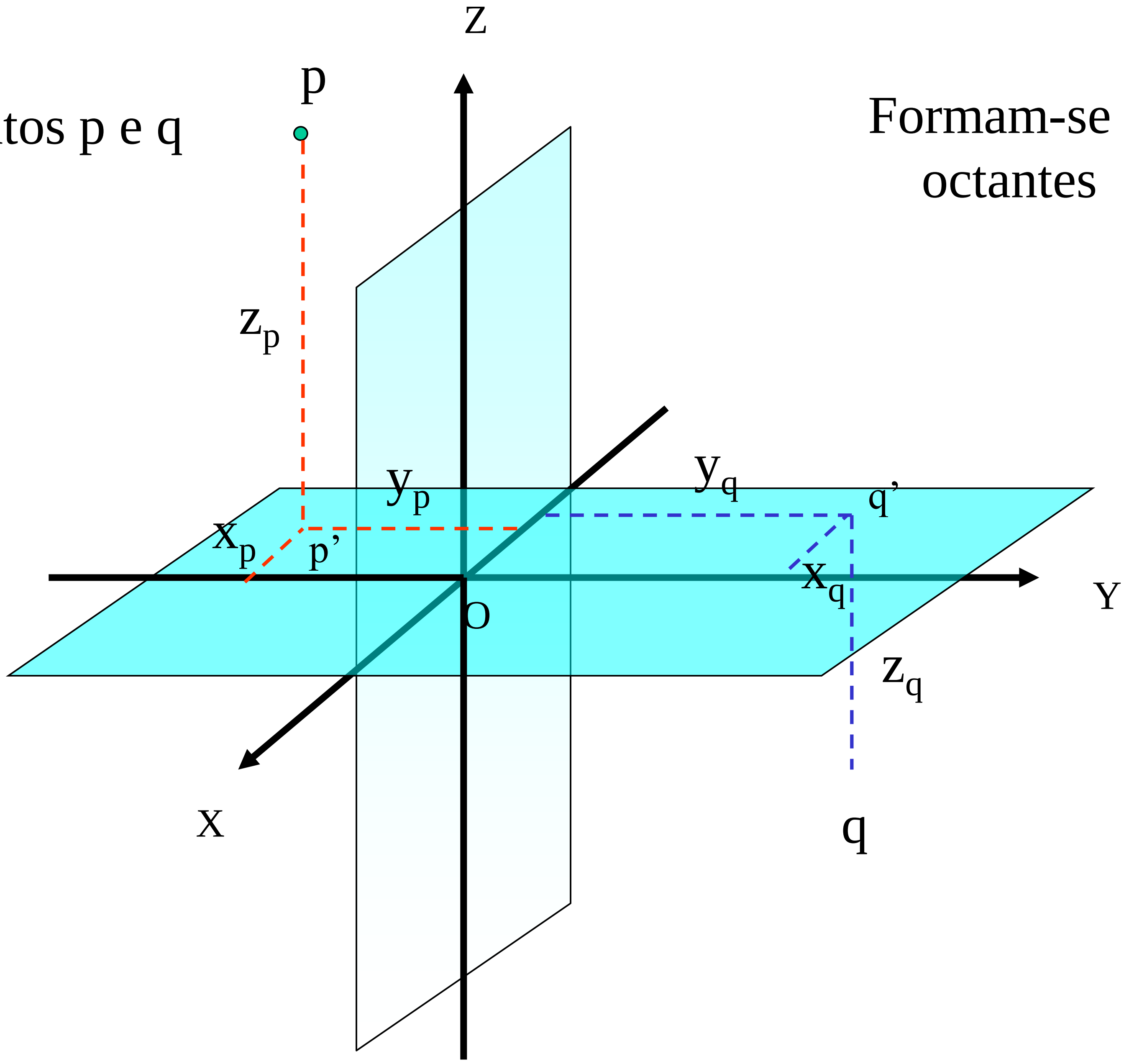
- Prof. Dr. Carlos Aurélio Nadal

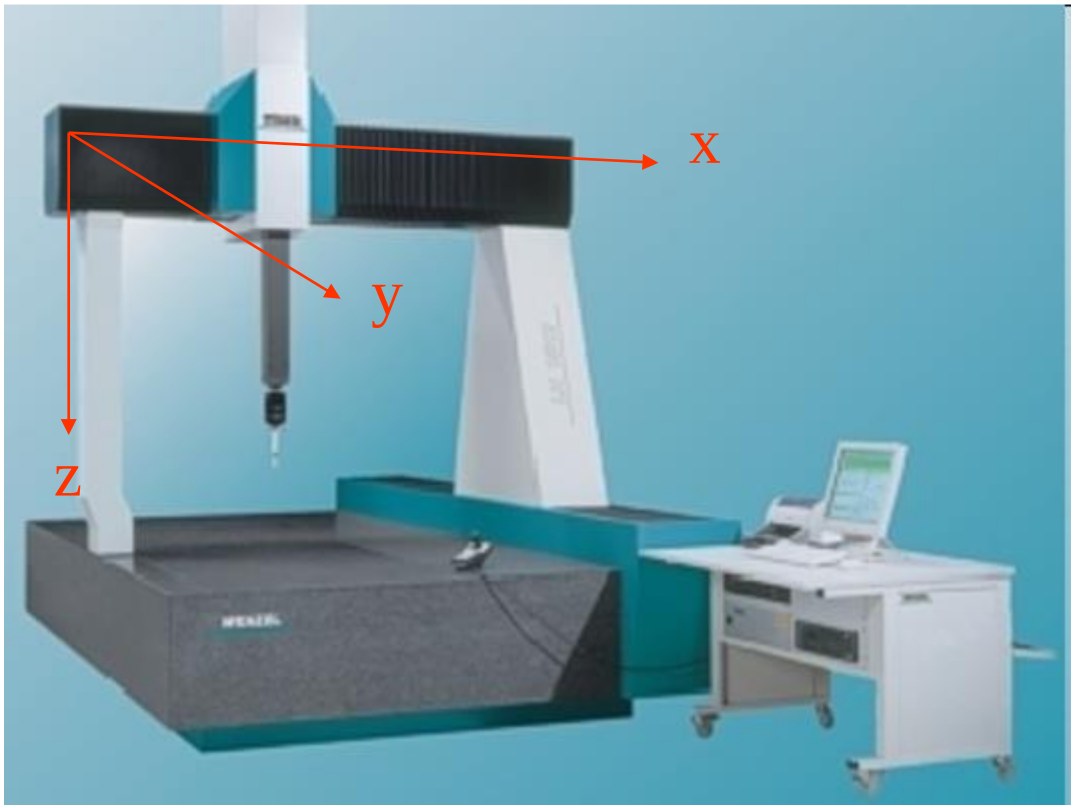
Sistema de coordenadas Tridimensionais no espaço



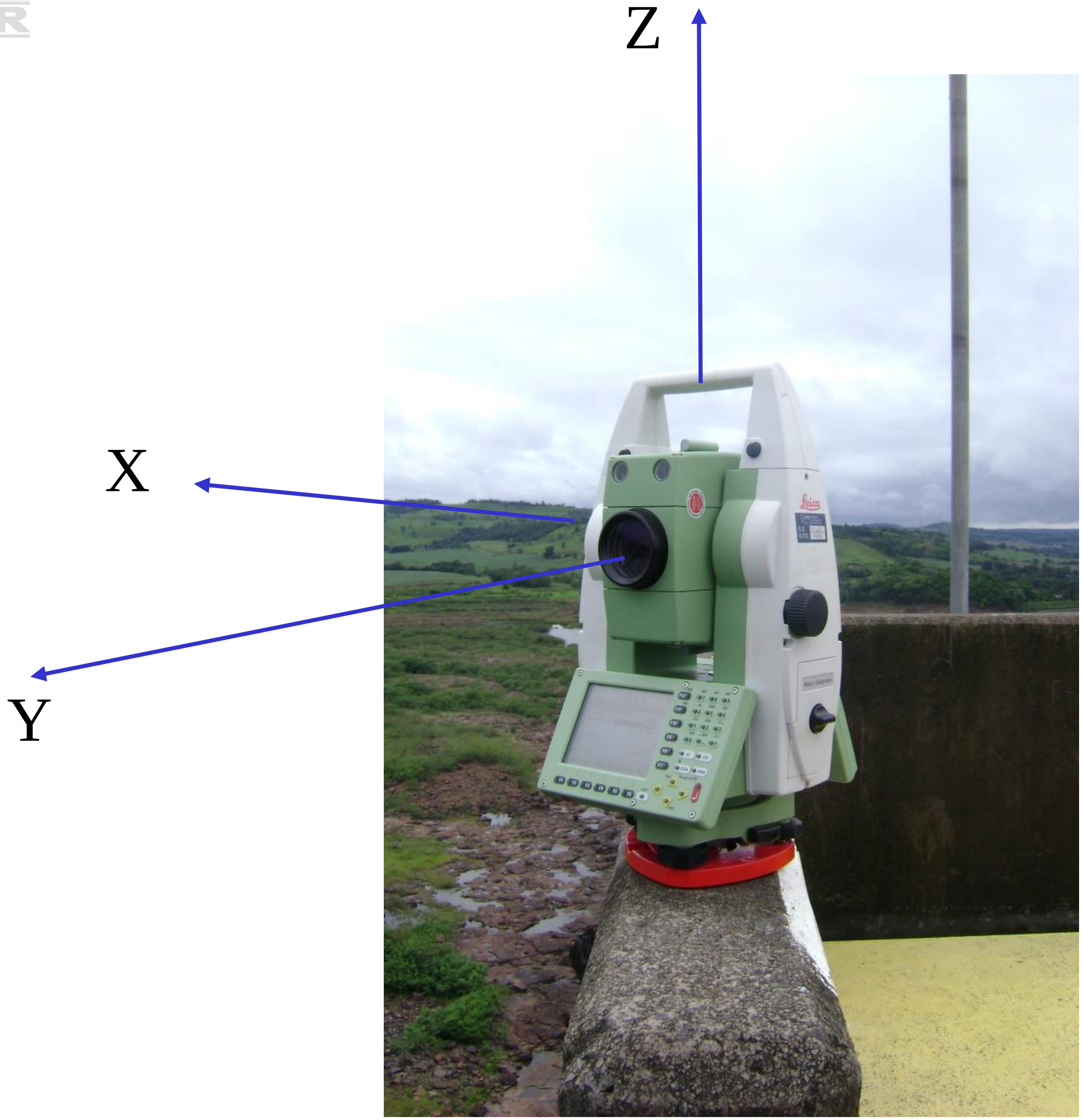
Posicionamento espacial dos pontos p e q

Formam-se 8 octantes





Máquina de medição tridimensional



Origem: ponto cardã

SISTEMA DE COORDENADAS INSTRUMENTAL

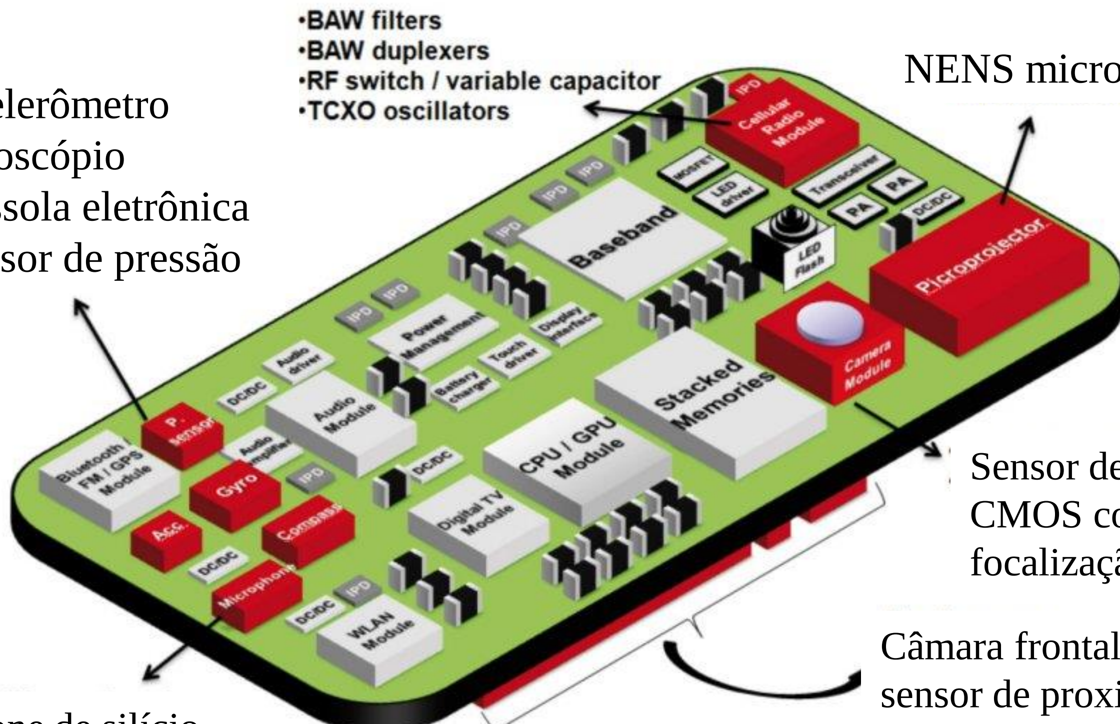
MEMS = sistemas microeletromecânicos *Micro Electro Mechanical Systems*

MEMS & Sensors

VISTA SIMPLIFICADA DOS MEMS E DOS SENSORES EM VERMELHO DE UM SMARTPHONE

Acelerômetro
Giroscópio
Bussola eletrônica
Sensor de pressão

NENS micro espelho



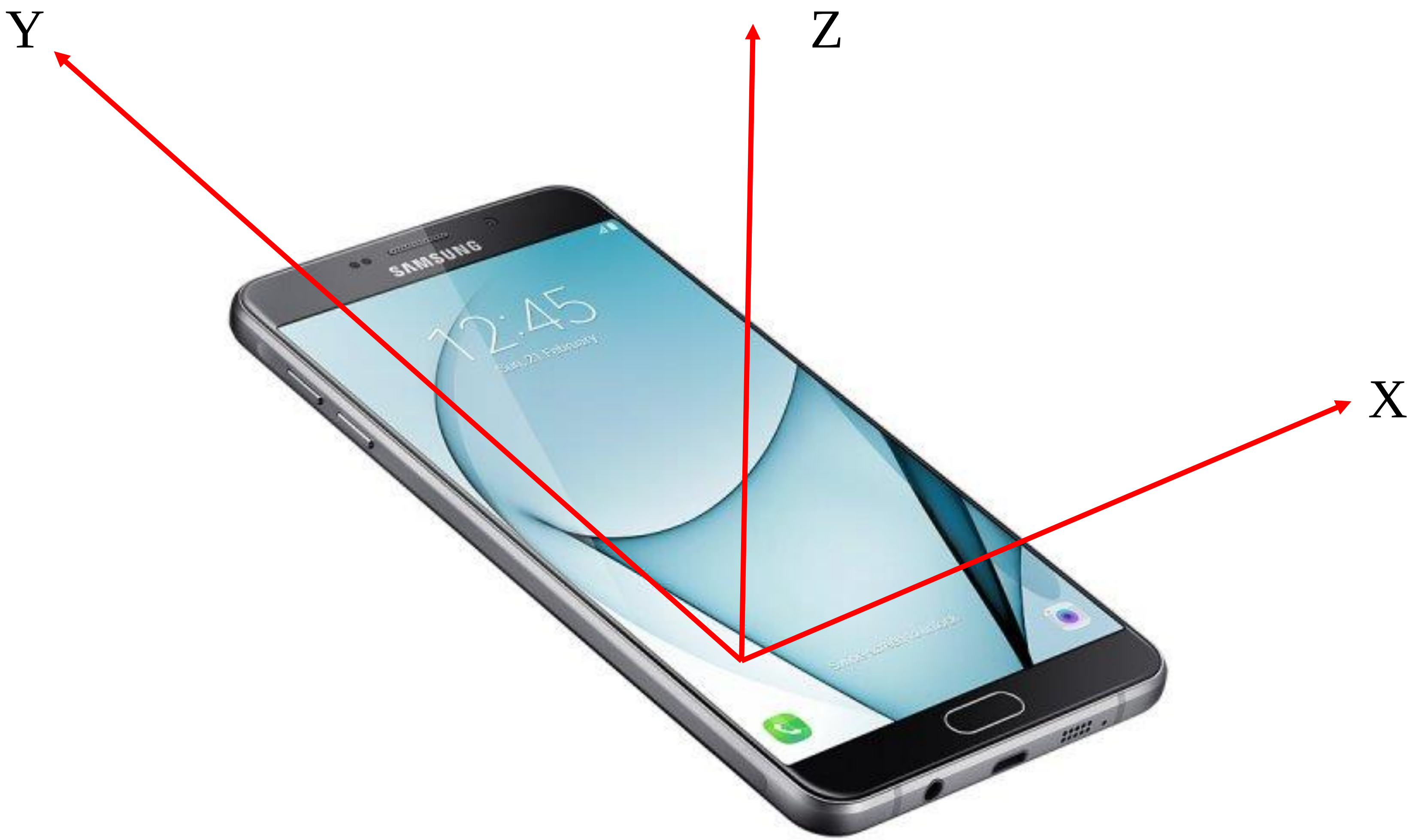
Sensor de imagem CMOS com auto focalização

Câmara frontal ALS e sensor de proximidade
Micro display

Microfone de silício

© July 2010

SISTEMAS DE COORDENADAS ASSOCIADO AO SMARTPHONE



SISTEMA TRIDIMENSIONAL DE COORDENADAS LOCAIS IMPLANTADO NA OBRA

(VERTICAL)

Y

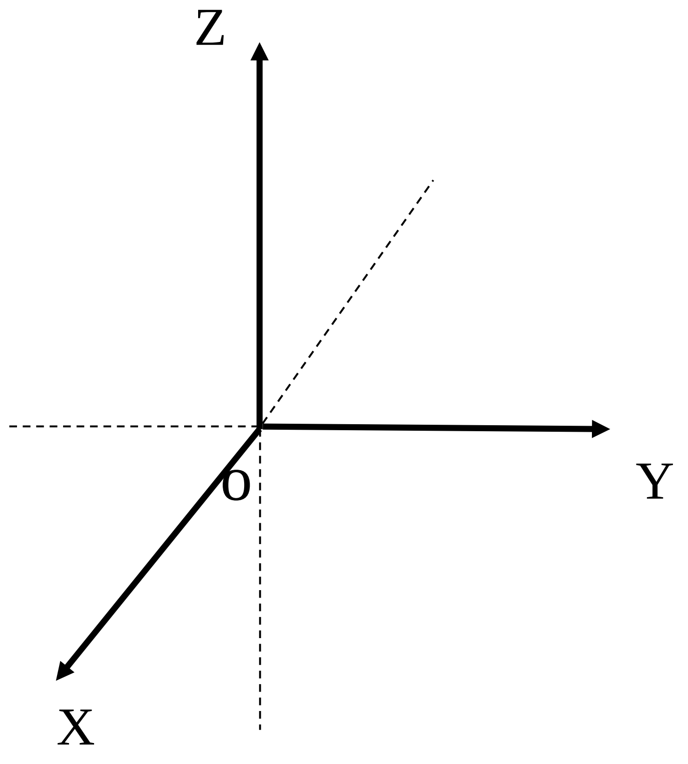
(FLUXO DO RIO)

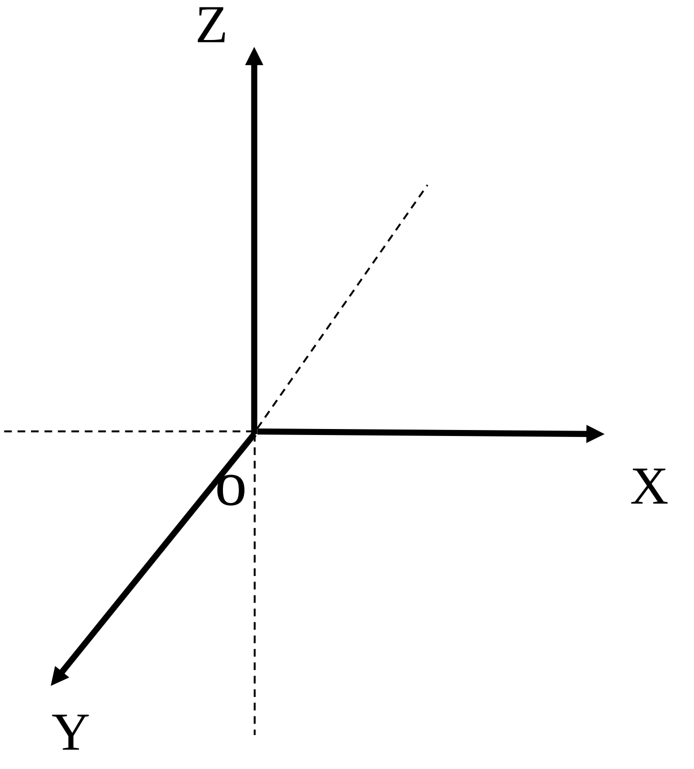
(ALINHAMENTO DO BARRAMENTO)

X

TERMINAL DE CONTEINERS DE PARANAGUA (TCP)

Sistemas de coordenadas cartesianas ortogonais tridimensionais

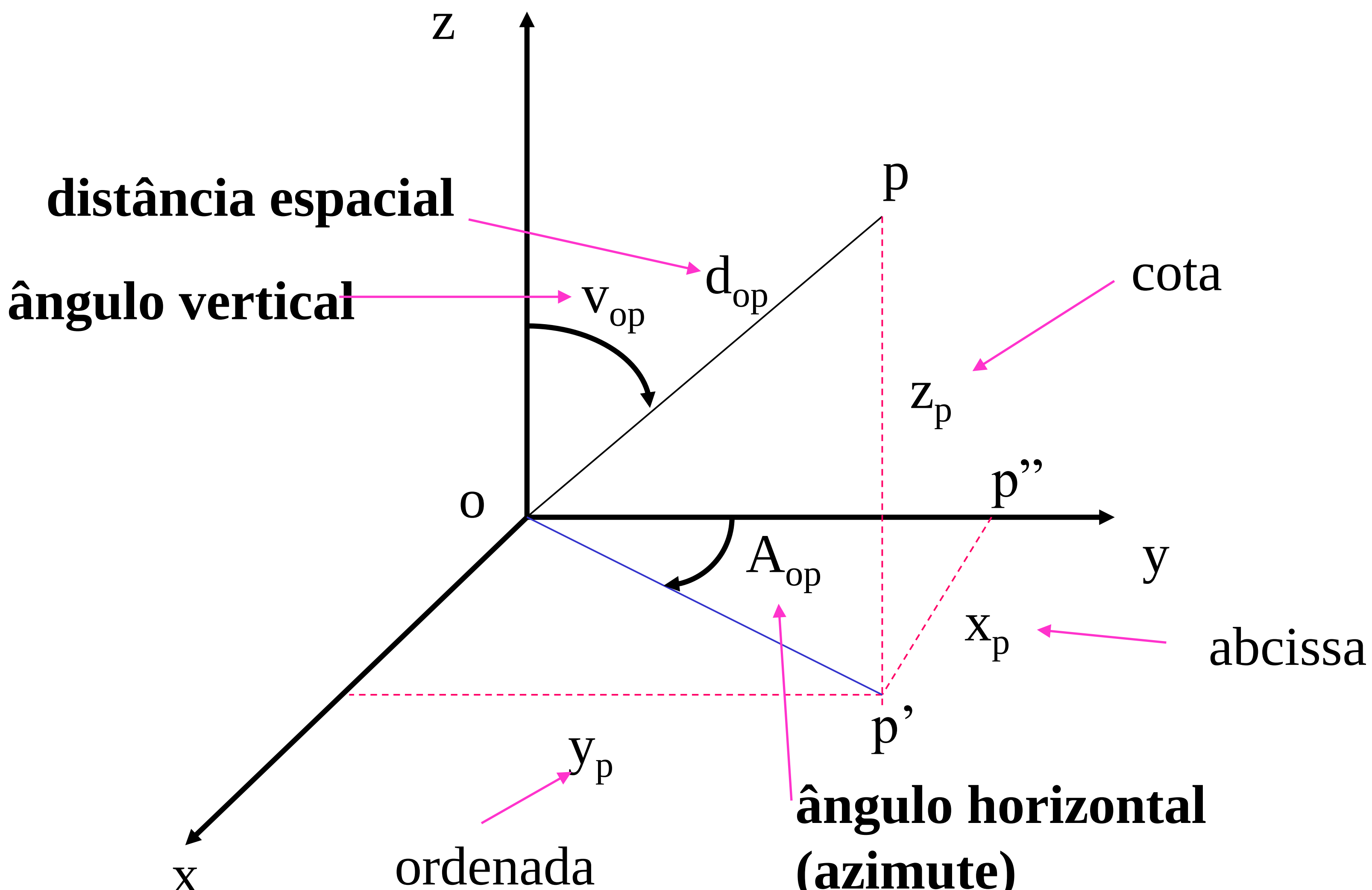




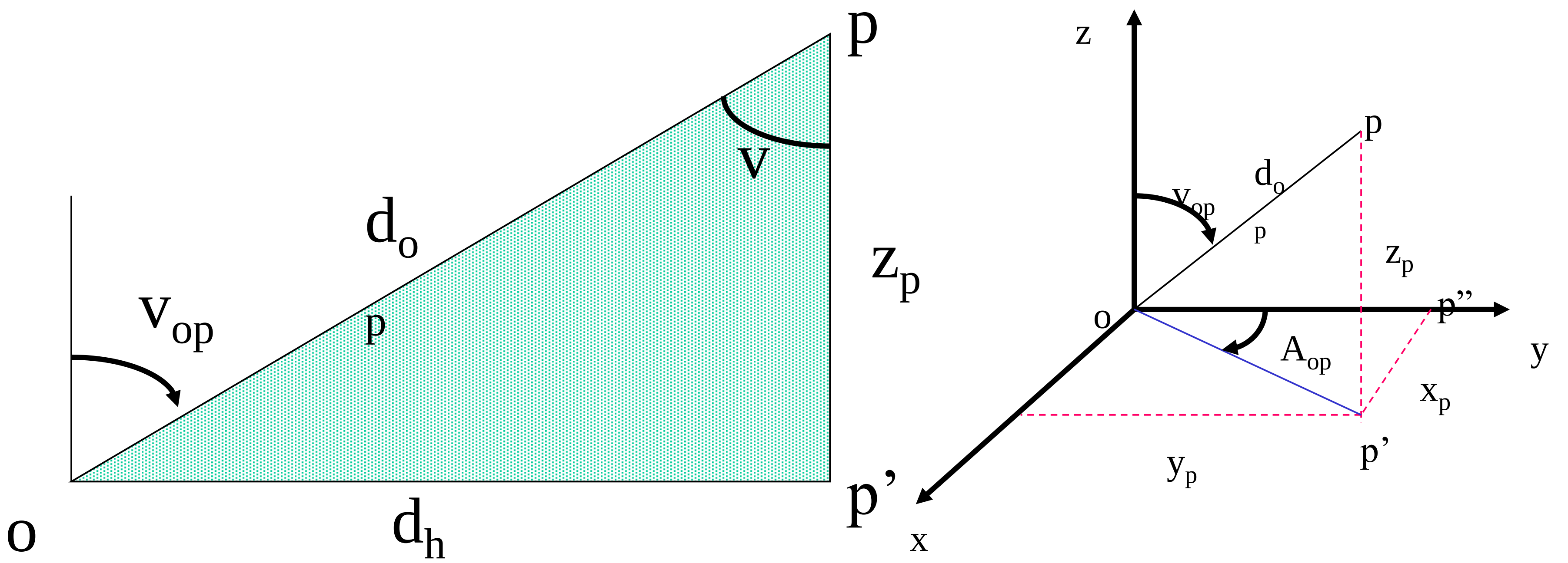
Sistema dextrógiro

Sistema levógiro

Sistema de coordenadas cartesianas ortogonais tridimensionais e coordenadas polares



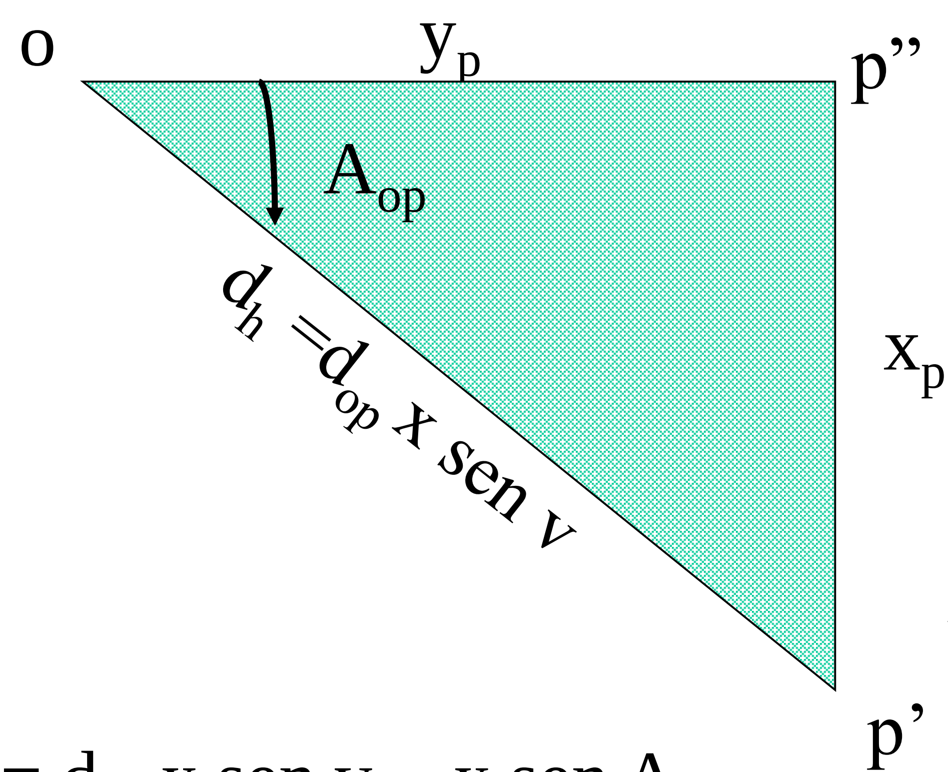
Transformação de coordenadas cartesianas em polares

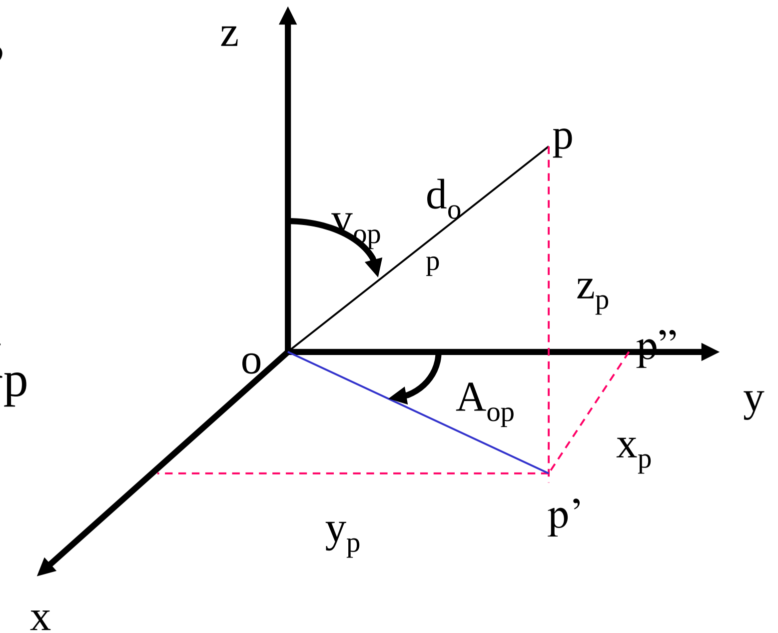


$$d_h = d_{op} \times \text{sen } v_{op}$$

$$z_p = d_{op} \times \cos v_{op}$$

Transformação de coordenadas cartesianas em polares





$$x_p = d_{op} \text{ x sen } v_{op} \text{ x sen } A_{op}$$

$$y_p = d_{op} \text{ x sen } v_{op} \text{ x cos } A_{op}$$

$$x_p = d_h \text{ x sen } A_{op}$$

$$y_p = d_h \text{ x cos } A_{op}$$

UFPR

sistema dextrógiro

$$x_p = d_{op} \text{ sen } V_{op} \text{ sen } A_{op}$$
$$y_p = d_{op} \text{ sen } V_{op} \cos A_{op}$$
$$z_p = d_{op} \cos V_{op}$$

sistema levógiro

$$x_p = d_{op} \text{ sen } V_{op} \cos A_{op}$$
$$y_p = d_{op} \text{ sen } V_{op} \text{ sen } A_{op}$$
$$z_p = d_{op} \cos V_{op}$$

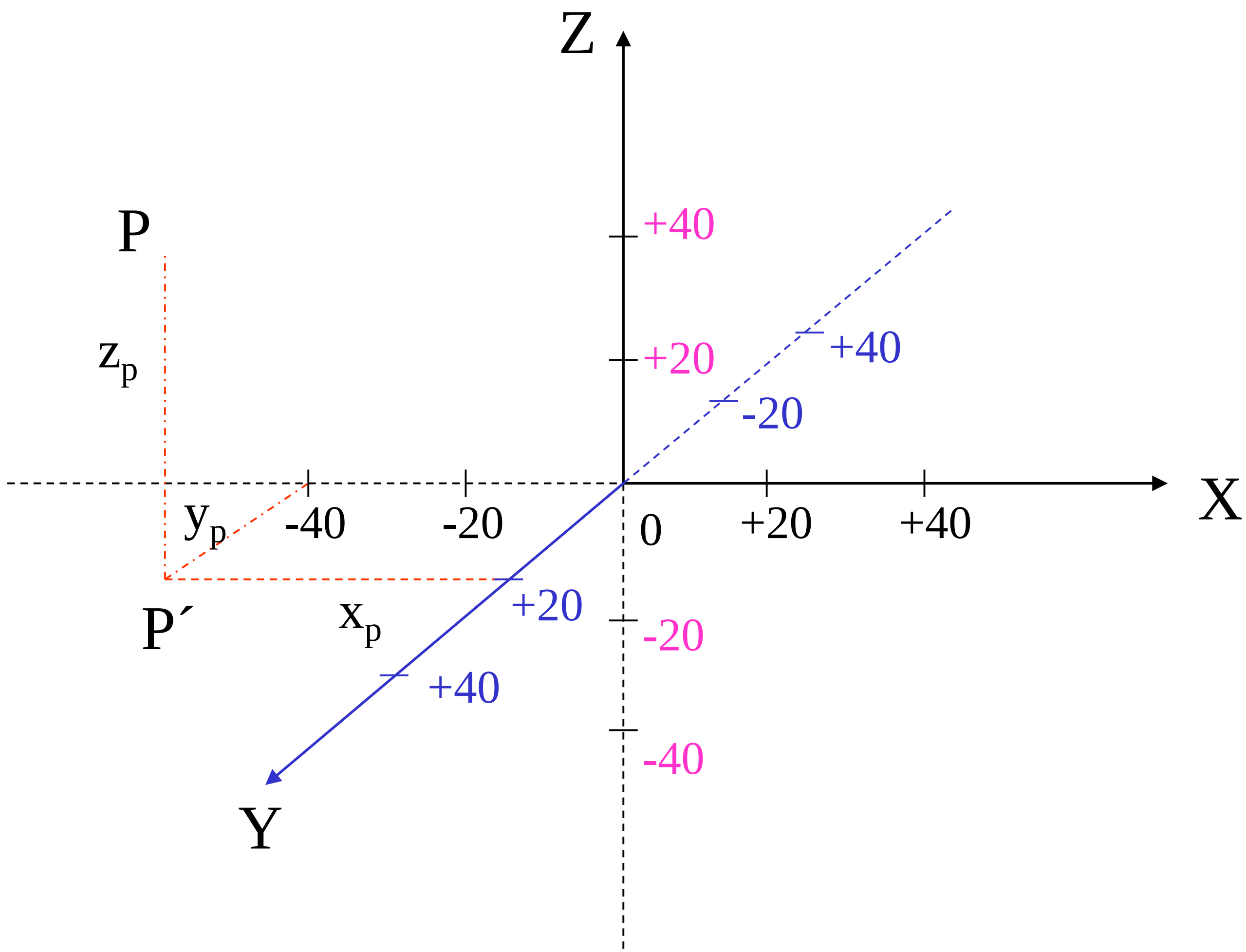
no plano com V= 90º , resultando:

$$x_p = d_{op} \text{ sen } A_{op}$$
$$y_p = d_{op} \cos A_{op}$$
$$z_p = 0$$

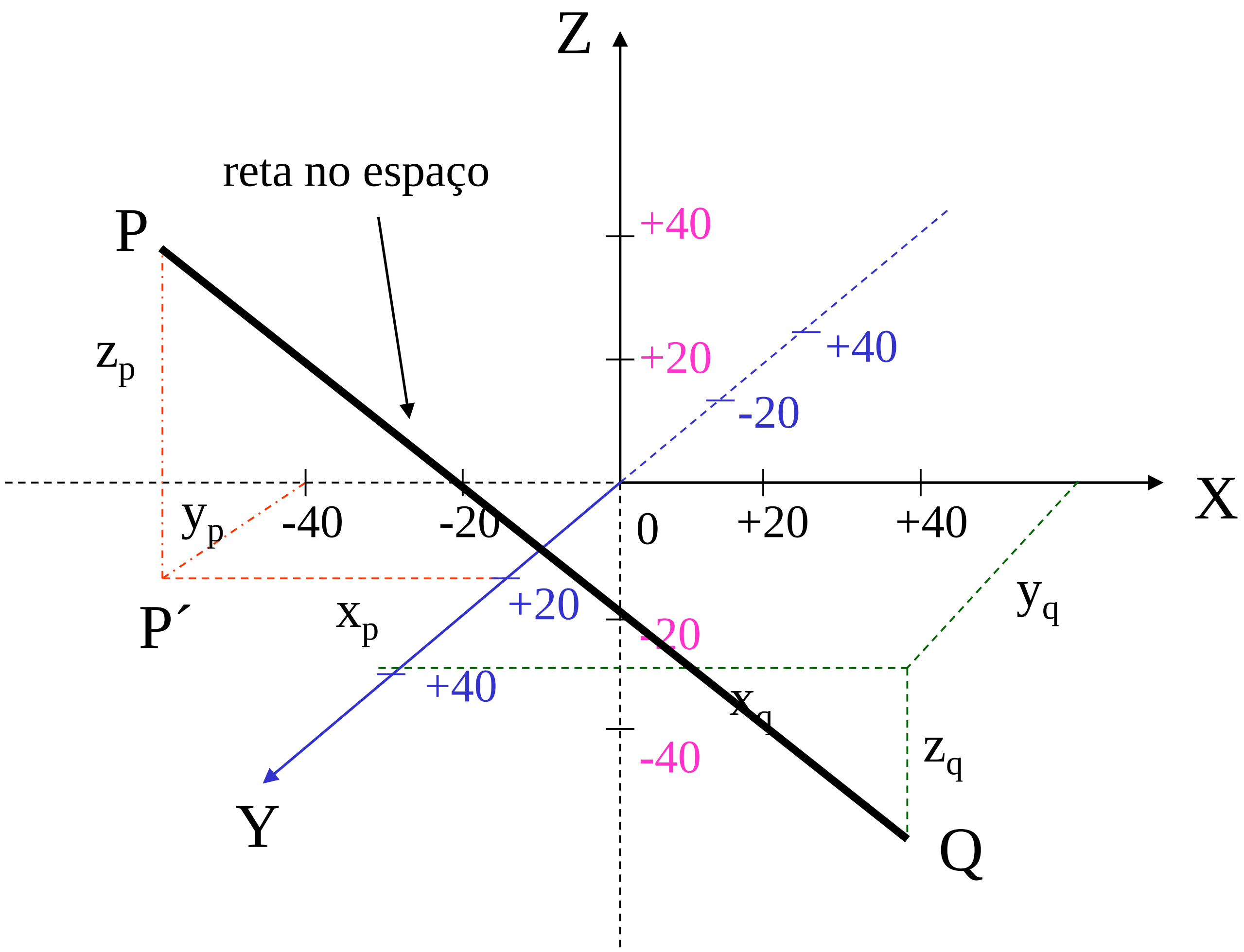
As coordenadas cartesianas ortogonais do ponto P são:

x_p = -40m y_p = +20m e z_p = +40m.

Que tipo é o sistema dextrógiro ou levógiro?



Uma linha reta no espaço pode agora ser observada como a que liga o ponto P ao ponto Q.



A distância espacial PQ é fornecida analiticamente pela expressão:

$$d_{pq} = \sqrt{[(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + (z_p - z_q)^2]}$$

Assim se ponto P possuí coordenadas em metros P(-40; 20; 40) e o ponto Q possui coordenadas em metros Q(60;40;-20), a distância espacial entre eles é fornecida da seguinte forma:

$$d_{pq} = \sqrt{[(-40 - 60)^2 + (20 - 40)^2 + (40 + 20)^2]}$$

$$d_{pq} = \sqrt{14000}$$

$$d_{pq} = 118,32\text{m}$$

A equação de uma reta no espaço é obtida pela solução do determinante:

$$\begin{pmatrix} x_p & y_p & z_p \\ x_q & y_q & z_q \\ x & y & z \end{pmatrix} = 0$$

As coordenadas dos pontos P(-40; 20; 40) e Q(60;40;-20) resultam na equação:

$$\begin{pmatrix} -40 & 20 & 40 \\ 60 & 40 & 20 \\ x & y & z \end{pmatrix} = 0$$

ou,

$$-1600z + 400x + 2400y - 1600x - 1200z + 800y = 0$$

$$-1200x + 3200y - 2800z = 0$$

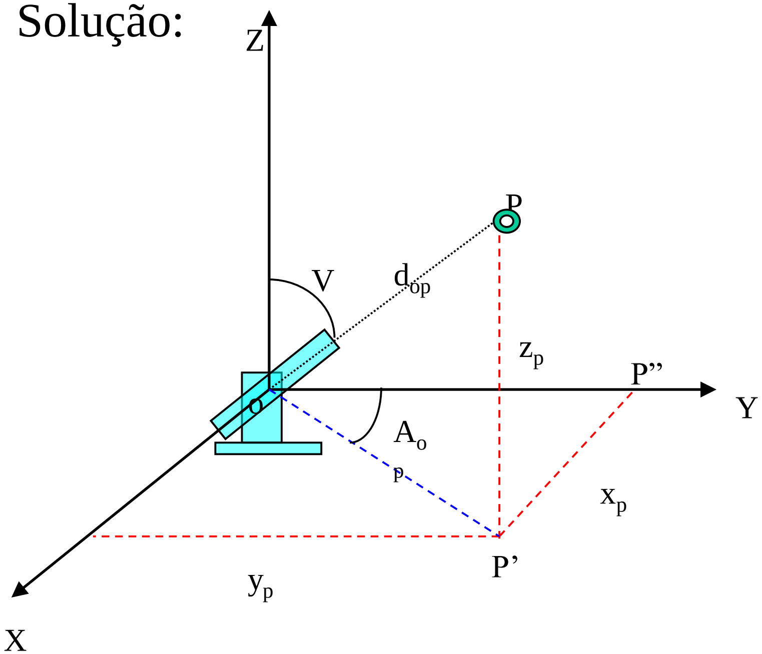
Exercício:

Utilizou-se uma estação total, com um sistema de coordenadas ortogonal tridimensional situado em seu centro óptico, com a seguinte orientação, o eixo y com sentido positivo para o norte geográfico, o eixo x com sentido positivo para leste e o eixo z coincidente com o fio de prumo com sentido positivo para o zenite (ponto situado no infinito acima da estação). Mediu-se as direções horizontais (A_{op}), direção vertical (V) e a distância inclinada d_{op} ao ponto alvo (P), obtendo-se as seguintes medidas:

A_{op} = 26° 32´ 50”; V = 86° 58´ 15”; d_{op} = 125,632m.

Calcular as coordenadas cartesianas ortogonais tridimensionais do alvo neste sistema.

Solução:



$x_p = d_{op} \text{ sen } V_{op} \text{ sen } A_{op}$

$y_p = d_{op} \text{ sen } V_{op} \cos A_{op}$

$z_p = d_{op} \cos V_{op}$

x_p = 125,632 x sen 86° 58´ 15” sen 26° 32´ 50”

y_p = 125,632 x sen 86° 58´ 15” cos 26° 32´ 50”

z_p = 125,632 x cos 86° 58´ 15”

x_p = 56,071m

y_p = 112,229m

z_p = 6,639m

Transformação de coordenadas cartesianas ortogonais tridimensionais x_p, y_p e z_p em coordenadas esféricas polares

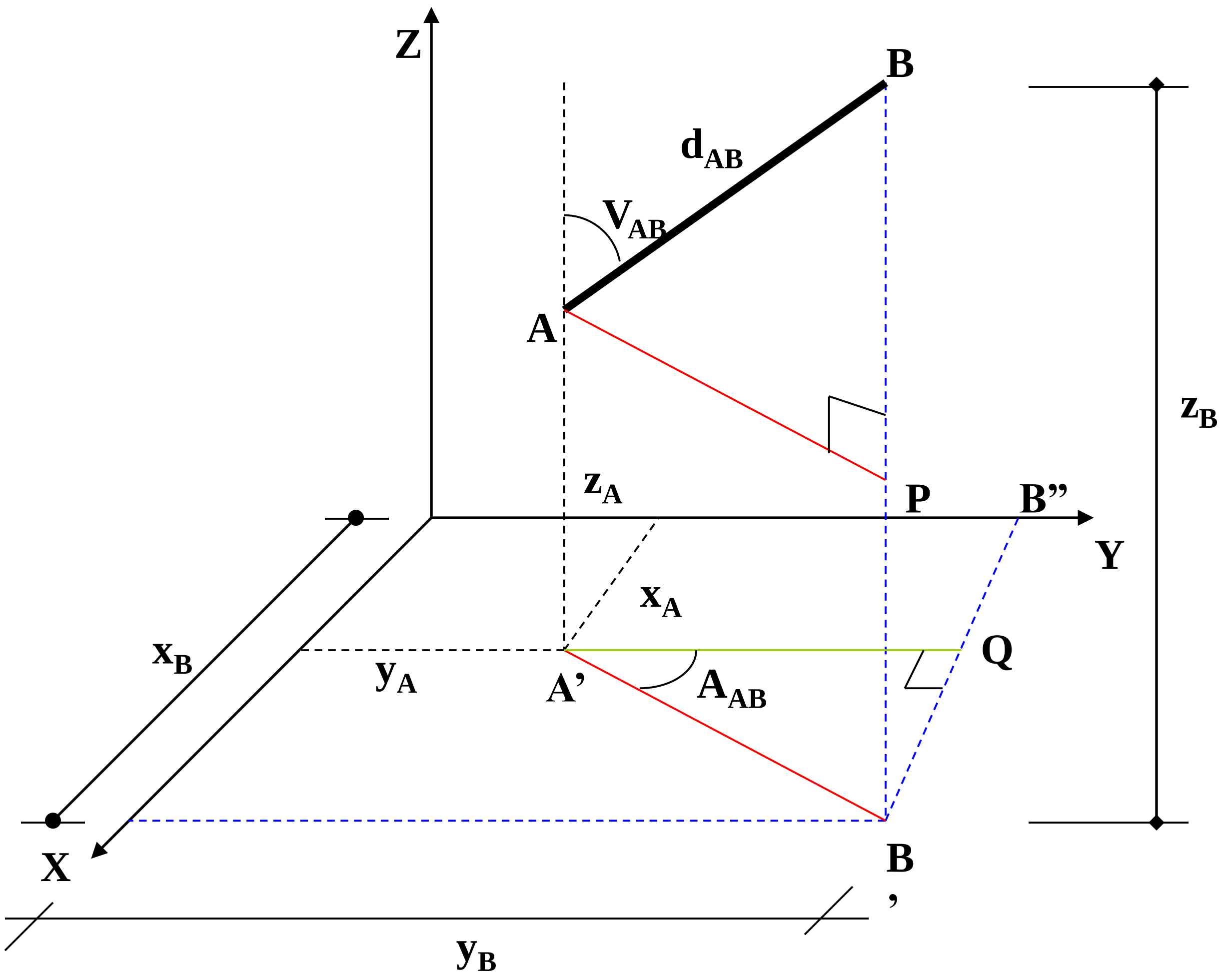
sistema dextrógiro

$$tg\ A_{op} = \frac{x_p}{y_p}$$

$$V_{op} = \arc\cos\left[\frac{z_p}{\sqrt{(x_p^2 + y_p^2 + z_p^2}}\right]$$

$$d_{op} = \sqrt{(x_p^2 + y_p^2 + z_p^2}$$

Problema direto do posicionamento tridimensional



PROBLEMA DIRETO DE POSICIONAMENTO TRIDIMENSIONAL

Dadas ou conhecidas de um levantamento anterior:

coordenadas tridimensionais do ponto A x_A, y_A , z_A

Mede-se:

azimute da direção AB = A_{AB}

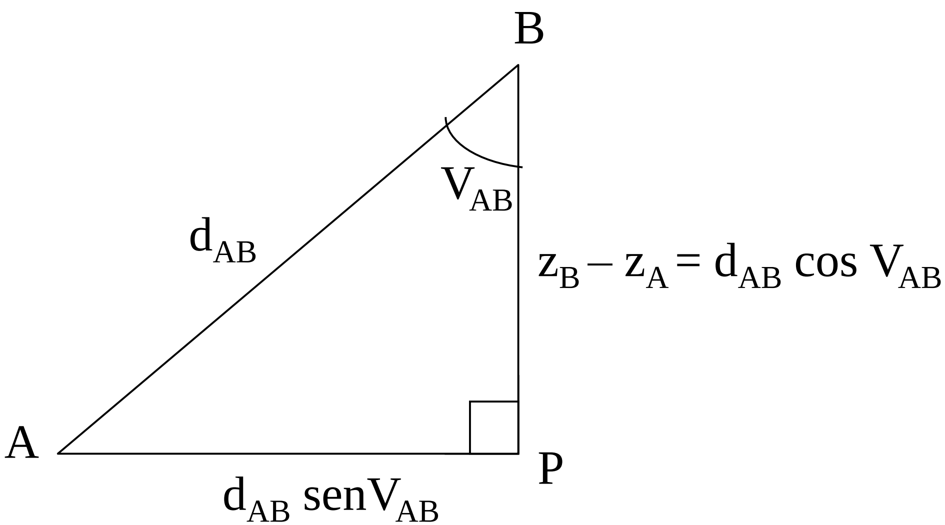
distância entre A e B = d_{AB}

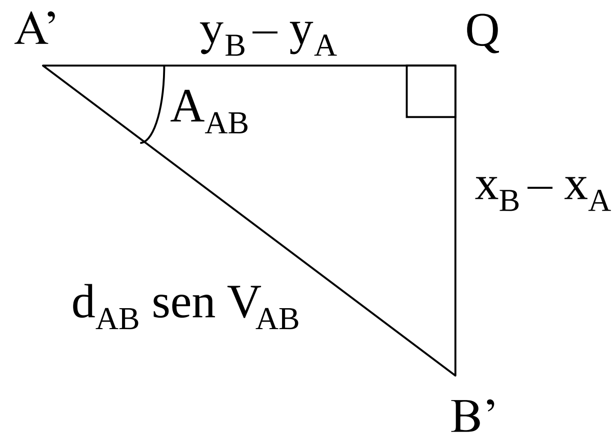
direção zenital ou distância zenital referente a direção AB = V_{AB}

Pede-se:

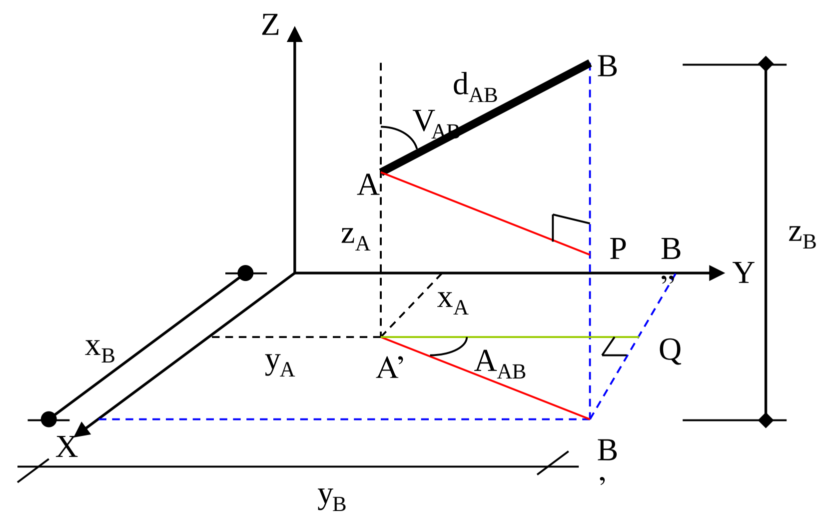
coordenadas tridimensionais do ponto B x_B, y_B , z_B

Triângulos retângulos APB e A'B'Q





$$x_B - x_A = d_{AB} \text{ sen } V_{AB} \text{ sen } A_{AB}$$
$$y_B - y_A = d_{AB} \text{ sen } V_{AB} \cos A_{AB}$$
$$z_B - z_A = d_{AB} \cos V_{AB}$$



$$x_B = x_A + d_{AB} \text{ sen } V_{AB} \text{ sen } A_{AB}$$
$$y_B = y_A + d_{AB} \text{ sen } V_{AB} \cos A_{AB}$$
$$z_B = z_A + d_{AB} \cos V_{AB}$$

Problema inverso do posicionamento no espaço tridimensional

Cálculo da distância espacial entre os pontos A e B

$$d_{AB} = [(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2]^{1/2}$$

Cálculo do ângulo zenital entre A e B

$$V_{AB} = \text{arc cos} \frac{z_B - z_A}{[(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2]^{1/2}}$$

Cálculo do azimute entre os pontos A e B

$$A_{AB} = \text{arc tg} \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}$$

Exercício:

A listagem com o resultado de um rastreio GPS apresenta as coordenadas Tridimensionais geodésicas de dois vértices P01 e P02 fornecidas as seguir:

PO1	$x_1 = 3763803,17745$	PO2	$x_2 = 3761470,79868$
	$y_1 = -4366181,98370$		$y_2 = -4367585,08810$
	$z_1 = -2722619,51292$		$z_2 = -2723355,20840$

Calcular a distância entre os vértices, o azimute do vértice P01 para P02 e a distância zenital de P01 para P02.

Solução:

Distância P01 – P02

$$d_{12} = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2}$$

$$d_{12} = \sqrt{(3761470,79868 - 3763803,17745)^2 + (-4367585,08810 + 4366181,98370)^2 + (-2723355,20840 + 2722619,51292)^2}$$

$$d_{12} = \sqrt{7949944,045}$$

$$d_{12} = 2819,565\text{m}$$

Azimute P01 – P02

$$A_{12} = \text{arc tg} \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$$

$$A_{12} = \text{arc tg} \frac{3761470{,}79868 - 3763803{,}17745}{-4367585{,}08810 + 4366181{,}98370}$$

$$A_{12} = \text{arc tg} \frac{-2332{,}379}{-1403{,}105}$$

$$A_{12} = \text{arc tg } 1{,}66229826$$

A equação apresenta duas soluções no primeiro quadrante e no terceiro quadrante.

Solução no primeiro quadrante:

$$A_{12} = 58°\ 58'\ 11''$$

No terceiro quadrante:

$$A_{12} = 58°\ 58'\ 11'' + 180° \quad \therefore \quad A_{12} = 238°\ 58'\ 11''$$

Como a solução pode estar no 1° ou no 3 ° Quadrante. A tabela abaixo esclarece a obtenção de quadrantes.

Quadrante	numerador	denominador
1° Q	+	+
2° Q	+	-
3° Q	-	-
4° Q	-	+

Neste caso, como o denominador e o numerador da divisão resultaram negativos adota-se o 3° Quadrante, assim:

$$A_{12} = 238° \, 58' \, 11''$$

Distância zenital P01 – P02

$$V_{12} = \text{arc cos} \frac{z_2 - z_1}{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2}}$$

$$V_{12} = \text{arc cos} \frac{-2723355{,}20840 + 2722619{,}51292}{2819{,}565}$$

$$V_{12} = \text{arc cos} \frac{-735{,}696}{2819{,}565}$$

$$V_{12} = \text{arc cos} -0{,}260925355$$

A solução encontra-se no segundo ou no terceiro quadrante, neste caso adota-se o segundo quadrante pois convenciona-se a distância zenital menor ou igual a 180 °.

Solução no primeiro quadrante:

$$[V_{12}] = 74° \ 52' \ 30''$$

Solução no segundo quadrante

$$V_{12} = 180° - 74° \ 52' \ 30'' \quad \therefore \quad V_{12} = 105° \ 07' \ 30''$$

Neste caso a distância zenital vale:

$$V_{12} = 105° \ 07' \ 30''$$

Exercício proposto:

Determinou-se as coordenadas tridimensionais do vértice PO1 obtendo-se:

$$x_1 = 3763803{,}17745$$
$$y_1 = -4366181{,}98370$$
$$z_1 = -2722619{,}51292$$

Mediu-se a partir do vértice P01 em direção ao vértice P02

$$d_{12} = 2819{,}565\,m$$
$$A_{12} = 238°\ 58'\ 11''$$
$$V_{12} = 105°\ 07'\ 30''$$

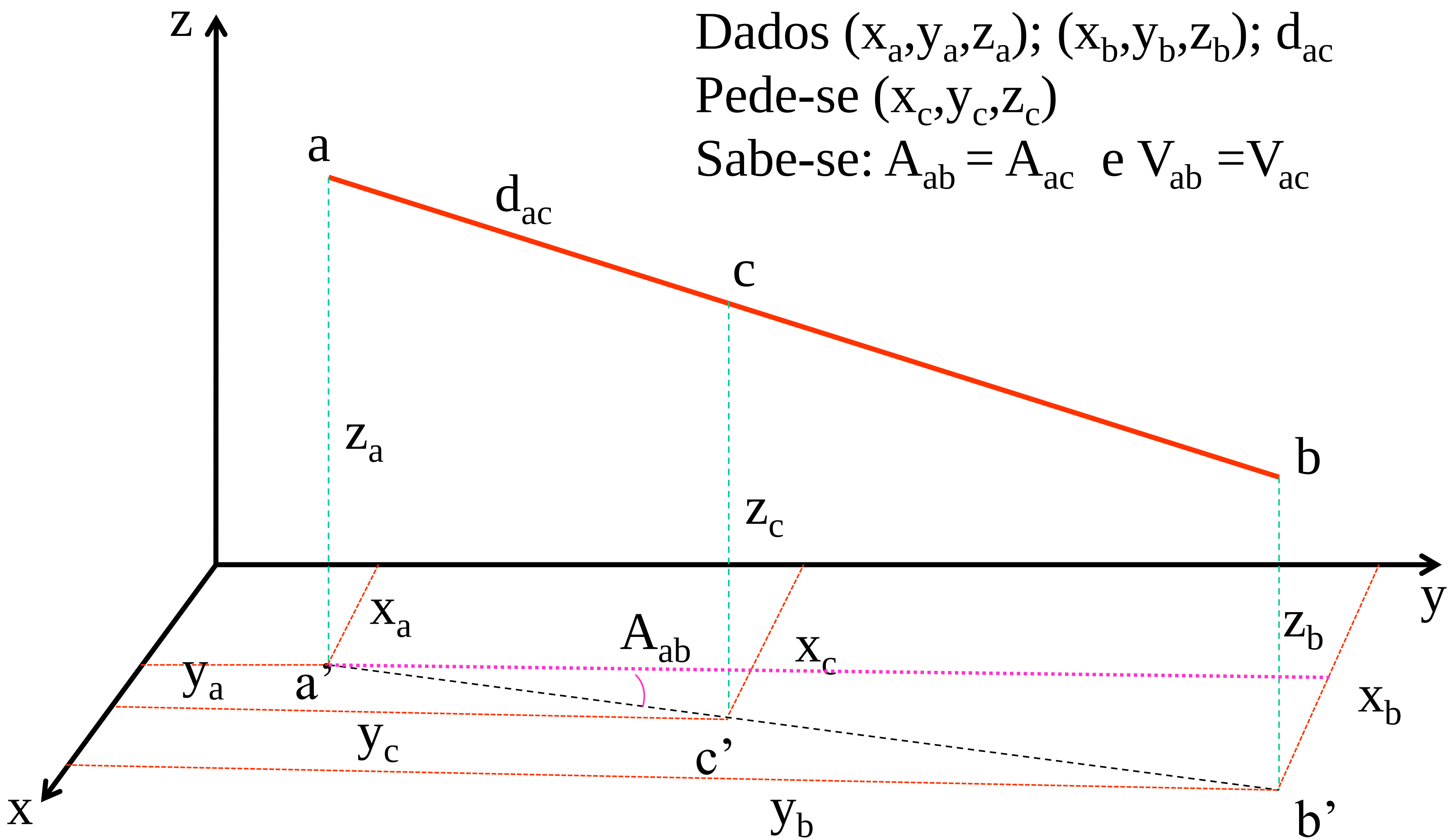
Calcular as coordenadas cartesianas ortogonais tridimensionais do vértice P02.

Resposta:

$$x_2 = 3761470{,}79868$$
$$y_2 = -4367585{,}08810$$
$$z_2 = -2723355{,}20840$$

Coordenadas de pontos de uma reta no espaço

Dados (x_a,y_a,z_a); (x_b,y_b,z_b); d_{ac}
Pede-se (x_c,y_c,z_c)
Sabe-se: $A_{ab} = A_{ac}$ e $V_{ab} = V_{ac}$



Efetuar a solução teórica para o problema

Solução:

1) Cálculo da distância espacial entre os pontos a e b

$$d_{ab} = [(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2]^{1/2}$$

2) Cálculo do ângulo zenital entre A e B

$$V_{ab} = \text{arc cos} \frac{z_b - z_a}{d_{ab}}$$

3) Cálculo do azimute entre os pontos a e b

$$A_{ab} = \text{arc tg} \frac{x_b - x_a}{y_b - y_a}$$

4) Cálculo das coordenadas do ponto C

$$x_c = x_a + d_{ac} \text{ sen } V_{ab} \text{ sen } A_{ab}$$
$$y_c = y_a + d_{ac} \text{ sen } V_{ab} \cos A_{ab}$$
$$z_c = z_a + d_{ac} \cos V_{ab}$$

Pode-se calcular a posição de qualquer ponto que se encontre na reta ou em seu prolongamento com este formulário.