UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS DA TERRA
DEPARTAMENTO DE GEOMÁTICA

AJUSTAMENTO II – GA110

Prof. Alvaro Muriel Lima Machado

1

Ajustamento

Resolver o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x+2*y-2*z=-1 \\ 3*x-2*y+z=2 \\ 2*x-3*y+2*z=2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A * X = L$$

$$A^{-1} * A * X = A^{-1} * L$$

$$I * X = X = A^{-1} * L$$

```
A = [1 2 -2;3 -2 1;2 -3 2];
L = [-1;2;2];
X = inv(A)*L
```

$\rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

2

Ajustamento

Resolver o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x+2*y-2*z=-1 \\ 3*x-2*y+z=2 \\ 2*x-3*y+2*z=2 \\ 3*x-y+2*z=6 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$A * X = L$$

3

Ajustamento

Dada a inconsistência das equações, podemos ter 4 soluções diferentes:

a) Sistema composto pelas equações 1, 2 e 3 ➔ $X = \begin{bmatrix} 1,0000 \\ 2,0000 \\ 3,0000 \end{bmatrix}$

b) Sistema composto pelas equações 1, 2 e 4 ➔ $X = \begin{bmatrix} 0,8667 \\ 1,5333 \\ 2,4667 \end{bmatrix}$

c) Sistema composto pelas equações 1, 3 e 4 ➔ $X = \begin{bmatrix} 0,8571 \\ 1,5714 \\ 2,5000 \end{bmatrix}$

d) Sistema composto pelas equações 2, 3 e 4 ➔ $X = \begin{bmatrix} 0,8889 \\ 1,5556 \\ 2,4444 \end{bmatrix}$

4

Ajustamento

$$A * X = L$$

$$A^T * A * X = A^T * L$$

$$(A^T * A) * X = (A^T * L)$$

$$(A^T * A)^{-1} * (A^T * A) * X = (A^T * A)^{-1} * (A^T * L)$$

$$I * X = X = (A^T * A)^{-1} * (A^T * L)$$

A(4,:) = [3 -1 2]
L(4,1) = 6;
X = inv(A'*A)*(A'*L) ➔ $X = \begin{bmatrix} 0,8668 \\ 1,5527 \\ 2,4771 \end{bmatrix}$

5

Ajustamento de Observações

Quando as medidas não são feitas diretamente sobre as grandezas procuradas, mas sim sobre outras relacionadas matematicamente...

Método paramétrico ➔ $L_a = F(X_a)$
Os valores observados ajustados podem ser expressos explicitamente como uma função dos parâmetros ajustados.

Método dos correlatos ➔ $F(L_a) = 0$
Os valores observados ajustados devem satisfazer determinadas condições (erro de fechamento = zero).

Método combinado ➔ $F(L_a, X_a) = 0$
Os valores observados ajustados e os parâmetros ajustados são ligados por função não explícita (não se consegue separá-los).

6

Ajustamento: Método Paramétrico

Sejam:

L_b = Vetor (n X l) dos valores observados;
V = Vetor (n X l) dos resíduos;
L_a = Vetor (n X l) dos valores observados ajustados.

$$L_a = L_b + V$$

X0 = Vetor (u X l) com valores aproximados dos parâmetros;
X = Vetor correção (u X l);
Xa = Vetor dos parâmetros ajustados (um dos objetivos).

$$X_a = X_0 + X$$

Quando os valores observados ajustados podem ser expressos explicitamente como uma função dos parâmetros ajustados, isto é, quando se verifica o modelo matemático: $L_a = F(X_a)$ dizemos que o ajustamento se processa pelo método paramétrico.

7

Ajustamento: Método Paramétrico

$$L_a = F(X_a)$$

Substituindo o primeiro membro e linearizando o segundo:

$$L_b + V = F(X_0 + X) = F(X_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial X_a}\right|_{X_a = X_0} * X$$

Designando a função dos parâmetros aproximados: $L_0 = F(X_0)$

e a matriz das derivadas parciais $A = \left.\frac{\partial F}{\partial X_a}\right|_{X_a = X_0}$

tem-se: $L_b + V = L_0 + AX$ ou $V = AX + L_0 - L_b$

Fazendo-se: $L = L_0 - L_b$

Obtem-se o modelo linearizado do método paramétrico ${}_nV_1 = {}_nA_u\,{}_uX_1 + {}_nL_1$

8

Ajustamento: Método Paramétrico

$${}_nV_1 = {}_nA_u\,{}_uX_1 + {}_nL_1$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{a1}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{a2}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{au}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_{a1}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{a2}} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{au}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_{a1}} & \frac{\partial f_n}{\partial x_{a2}} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{au}} \end{bmatrix}_{X_0} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \dots \\ l_n \end{bmatrix}$$

O índice na parte inferior direita da matriz dos coeficientes das incógnitas lembra que as derivadas parciais são calculadas numericamente com os valores aproximados das incógnitas.

Fazendo: $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_{aj}} \begin{cases} i = 1,2,\dots,n \\ j = 1,2,\dots,u \end{cases}$

a primeira linha se escreve: $v_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1u}x_u + l_1$

9

Ajustamento: Método Paramétrico

Considerações sobre a Matriz dos Pesos

Se as observações não oferecem o mesmo "grau de confiança", podemos "homogeneizá-las" multiplicando-as por "pesos", isto é, por valores tanto maiores quanto maior a confiança que inspiram (quanto menor o valor de σ^2)

$$Q = \frac{1}{\sigma_0^2} \Sigma L_b$$

Se a matriz Q for não singular admitirá uma inversa

$$Q^{-1} = \sigma_0^2 \Sigma L_b^{-1} = P$$

que recebe o nome de matriz dos pesos.

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$$

10

Ajustamento: Método Paramétrico – Equações Normais

Minimizando a forma quadrática fundamental, obtemos sucessivamente:

$$\phi = V^T PV = (AX + L)^T P(AX + L) = \min$$

$$\phi = (X^T A^T + L^T)P(AX + L) = X^T A^T PAX + X^T A^T PL + L^T PAX + L^T PL = \min$$

onde segundo e terceiro termos são iguais... (1Xu*uXn*nXn*nX1)

$$\phi = X^T A^T PAX + 2X^T A^T PL + L^T PL = \min$$

Igualando a zero a derivada primeira em relação a X:

$$\frac{\partial \phi}{\partial X} = 2A^T PAX + 2A^T PL = 0 \quad \rightarrow \quad X = -(A^T PA)^{-1}.(A^T PL)$$

Fazendo: $N = A^T PA$ e $U = A^T PL$ ➔ $X = -N^{-1}U$

cujas componentes convertem os parâmetros aproximados em ajustados:

$$X_a = X_0 + X$$

11

Ajustamento: Método Paramétrico - MVC

a) Antes do ajustamento necessitamos estimar ΣL_b ➔ $P = \sigma_0^2 \Sigma L_b^{-1}$

b) MVC das correções Σ_X

$$X = -N^{-1}U = -N^{-1}A^T PL = -N^{-1}A^T P(L_0 - L_b)$$

$$X = -N^{-1}A^T PL_0 + N^{-1}A^T PL_b$$

Aplicando a lei de propagação das covariâncias $\Sigma_X = G \Sigma L_b G^T$

$$G = N^{-1}A^T P$$

$$G^T = P^T AN^{-1} = PAN^{-1}$$ (P e N^{-1} são matrizes simétricas)

$$\Sigma_X = (N^{-1}A^T P)\Sigma L_b (PAN^{-1})$$

$$\Sigma_X = (N^{-1}A^T P)\sigma_0^2 P^{-1}(PAN^{-1}) = \sigma_0^2 N^{-1}A^T PAN^{-1} = \sigma_0^2 N^{-1}NN^{-1}$$

$$\Sigma_X = \hat{\sigma}_0^2 N^{-1}$$

12

Ajustamento: Método Paramétrico - MVC

c) MVC dos parâmetros $X_a = X_0 + X$

$$\Sigma X_a = \Sigma X = \hat{\sigma}_0^2 N^{-1}$$

d) MVC dos valores observados ajustados

$$L_a = L_b + V = L_b + AX + L = L_b + AX + L_0 - L_b$$

$$L_a = AX + L_0$$

$$\Sigma_{L_a} = A\Sigma_X A^T = \hat{\sigma}_0^2 AN^{-1}A^T$$

e) MVC dos resíduos

$$\Sigma_V = \Sigma_{L_a} - \Sigma_{L_b}$$

$$\Sigma_V = \hat{\sigma}_0^2 (AN^{-1}A^T - P^{-1})$$

13

Ajustamento: Método Paramétrico

Variância a posteriori

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T PV}{n-u}$$

n = equações de observação

u = parâmetros

n – u = graus de liberdade

$$V^T PV = X^T U + L^T PL$$

14

Ajustamento: Método Paramétrico

Análise da Variância a posteriori: estimador imparcial da variância a priori

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T PV}{n-u} = \frac{V^T PV}{\nu}$$

Qualidade do ajustamento: Comparação entre σ_0^2 e $\hat{\sigma}_0^2$

Se $\hat{\sigma}_0^2 > \sigma_0^2$

➔ **A qualidade das observações é pior do que a suposta. Observações foram superestimadas!**

Se $\hat{\sigma}_0^2 < \sigma_0^2$

➔ **A qualidade das observações é melhor do que a suposta. Observações foram subestimadas!**

15

Ajustamento: Método Paramétrico

Análise da Variância a posteriori: estimador imparcial da variância a priori

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T PV}{n-u} = \frac{V^T PV}{\nu}$$

Qualidade do ajustamento: Teste de hipótese

Hipótese básica $H_0: \ \sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2$

Hipótese alternativa $H_1: \ \sigma_0^2 \neq \hat{\sigma}_0^2$

Cálculo ➔ $\chi^2 = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}\nu = \frac{V^T PV}{\sigma_0^2}$

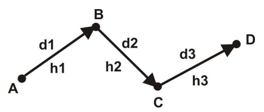
Da tabela, exemplificando com α = 5% ➔ $\chi^2_{\nu;2,5\%} < \chi^2 < \chi^2_{\nu;97,5\%}$

Nestas condições, a hipótese básica é aceita com risco de 5%

16

Ajustamento: Método Paramétrico

Uma linha de nivelamento foi feita ligando dois pontos A e D de altitudes conhecidas H_A = 785,53m e H_D = 842,00m, conforme figura abaixo.
O sentido da seta indica a direção da estação mais elevada.
Os pesos das observações são inversamente proporcionais aos comprimentos das linhas. As observações não são correlacionadas.
Calcular as altitudes dos pontos B e C ajustadas usando ajustamento paramétrico.



Seção	Desnível (m)	Distância (km)
AB=h_1	32,54	2,0
BC=h_2	5,93	1,0
CD=h_3	17,97	2,5

17

Ajustamento: Método Paramétrico

a) Modelo matemático

$$L_a = L_b + V \quad ➔ \quad \begin{aligned} h_B^a - h_A &= 32{,}54 + v_1 \\ h_C^a - h_B^a &= 5{,}93 + v_2 \\ h_D - h_C^a &= 17{,}97 + v_3 \end{aligned}$$

b) Matriz das observações

$$L_b = \begin{bmatrix} 32{,}54 \\ 5{,}93 \\ 17{,}97 \end{bmatrix}$$

c) Matriz dos Pesos

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2{,}5 \end{bmatrix}$$

18

Ajustamento: Método Paramétrico

d) Solução inicial aproximada: Modelo linear

$$X_0 = 0 \rightarrow L_0 = F(X_0) = \begin{bmatrix} -785,53 \\ 0 \\ 842,00 \end{bmatrix}$$

e) Cálculo de L

$$L = L_0 - L_b = \begin{bmatrix} -785,53 - 32,54 \\ -5,93 \\ 842,00 - 17,97 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -818,07 \\ -5,93 \\ 824,03 \end{bmatrix}$$

19

Ajustamento: Método Paramétrico

f) Matriz A

$$\begin{array}{c|c} \text{Parâmetros} \rightarrow & \begin{array}{cc} h_B & h_C \end{array} & \text{Equações} \\ A = & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{Equação 1} \\ \text{Equação 2} \\ \text{Equação 3} \end{array} \end{array}$$

No FreeMat...

```
Lb = [32.54;5.93;17.97];
Lo = [-785.53;0;842.00];

L = Lo - Lb;

P = inv(diag([2; 1; 2.5]));

A = [1 0;-1 1;0 -1];
```

20

Ajustamento: Método Paramétrico

g) Equações Normais

$$N = A^T PA = \begin{bmatrix} 1,5000 & -1,0000 \\ -1,0000 & 1,4000 \end{bmatrix}$$

$$U = A^T PL = \begin{bmatrix} -403,1050 \\ -335,5420 \end{bmatrix} \qquad X = -N^{-1}U = \begin{bmatrix} 818,0809 \\ 824,0164 \end{bmatrix} m$$

h) Vetor dos Resíduos

$$V = AX + L = \begin{bmatrix} 1,0909 \\ 0,5455 \\ 1,3636 \end{bmatrix} * 10^{-2}$$

21

Ajustamento: Método Paramétrico

i) Variância a posteriori

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T PV}{n-u} = \frac{V^T PV}{3-2} = 1{,}6364 * 10^{-4}$$

j) MVC dos parâmetros

$$\sum_X = \hat{\sigma}_0^2 N^{-1} = \begin{bmatrix} 2{,}0826 & 1{,}4876 \\ 1{,}4876 & 2{,}2314 \end{bmatrix} * 10^{-4}$$

$$\sigma_{H_B} = 1{,}44cm \qquad \sigma_{H_C} = 1{,}49cm$$

22

Ajustamento: Método Paramétrico

Para modelos lineares não se precisa de valores aproximados...

➔ O mesmo problema pode ser resolvido de outra forma (se Lo = 0):

$$X = -N^{-1}U$$

$$X = -(A^T PA)^{-1}.(A^T PL)$$

$$L = L_0 - L_b$$

$$P = I$$ 🡐 Se todas as observações tem o mesmo peso...

$$X = -(A^T A)^{-1}.A^T (L_0 - L_b)$$

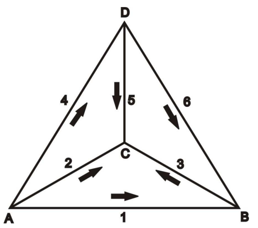
$$L_0 = 0$$

$$X = (A^T A)^{-1}.(A^T L_b)$$

23

Ajustamento: Método Paramétrico

O quadro e o esquema que se seguem resumem um nivelamento geométrico que partiu da referência de nível A, de altitude nula; as setas indicam o sentido em que o terreno se eleva.



LINHA	DESNÍVEL (m)	COMPRIMENTO (km)
1	6,16	4
2	12,57	2
3	6,41	2
4	1,09	4
5	11,58	2
6	5,07	4

Estimar as altitudes das estações B, C e D pelo método dos parâmetros.

Obs.: Tomar pesos inversamente proporcionais ao comprimento das linhas.

24

Ajustamento: Método Paramétrico

a) Modelo matemático $L_a = L_b + V$

25

Ajustamento: Método Paramétrico

b) Matriz das Observações

c) Matriz dos Pesos

26

Ajustamento: Método Paramétrico

d) Matriz A

e) Equações Normais

$$N = A^T PA$$

$$U = -A^T PL_b$$

$$X = -N^{-1}U$$

27

Ajustamento: Método Paramétrico

f) Vetor dos Resíduos

$$V = AX + L$$

28

Ajustamento: Método Paramétrico

g) Variância a posteriori

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T PV}{n-u} = \frac{V^T PV}{6-3}$$

h) MVC dos parâmetros

$$\Sigma_X = \hat{\sigma}_0^2 N^{-1} =$$

29

Ajustamento: Método Paramétrico

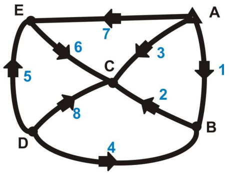
No FreeMat...

30

Ajustamento: Método Paramétrico

Realizar o ajustamento da rede de nivelamento esquematizada abaixo.
A altitude do ponto A é conhecida (H_A = 800,00m).

LINHA	DESNÍVEL (m)	DISTÂNCIA (km)
1	25,42	18,1
2	10,34	9,4
3	35,20	14,2
4	15,54	17,6
5	21,32	13,5
6	4,82	9,9
7	31,02	13,8
8	26,11	14,9



31

Ajustamento: Método Paramétrico

a) Modelo matemático $L_a = L_b + V$

32

Ajustamento: Método Paramétrico

b) Matriz das Observações

c) Matriz dos Pesos

33

Ajustamento: Método Paramétrico

d) Solução inicial aproximada: Modelo linear

$X_0 = 0$ ➔

Ajustamento: Método Paramétrico

e) Cálculo de L

$L = L_0 - L_b =$

Ajustamento: Método Paramétrico

f) Matriz A

Ajustamento: Método Paramétrico

No FreeMat...

Ajustamento: Método Paramétrico

e) Equações Normais

$$N = A^T PA =$$

$$U = A^T PL$$

V = AX + L =

$$X = -N^{-1}U$$

Ajustamento: Método Paramétrico

f) Variância a posteriori

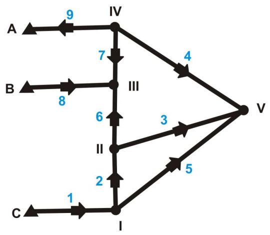
$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T PV}{n-u} = \frac{V^T PV}{8-4}$$

g) MVC dos parâmetros

$$\Sigma_X = \hat{\sigma}_0^2 N^{-1} =$$

Ajustamento: Método Paramétrico

Ajustamento de uma rede de nivelamento geométrico
- Pesos inversamente proporcionais ao comprimento das linhas



Linha	Desnível (m)	Distância (km)
1	10,038	1,14
2	8,297	2,84
3	1,949	3,21
4	5,217	6,03
5	10,244	6,75
6	1,562	0,84
7	4,837	2,94
8	3,370	2,01
9	15,979	5,28

Altitudes conhecidas
H_A = 33,831m; H_B = 19,316m; H_C = 2,791m

40

Ajustamento: Método Paramétrico

a) Modelo matemático $L_a = L_b + V$

41

Ajustamento: Método Paramétrico

b) Matriz das Observações

42

Ajustamento: Método Paramétrico

c) Matriz dos Pesos

43

Ajustamento: Método Paramétrico

d) Matriz A

44

Ajustamento: Método Paramétrico

No FreeMat...

45

Ajustamento: Método Paramétrico

e) Equações Normais

$$N = A^T PA =$$

$$U = A^T PL$$

V = AX + L =

$$X = -N^{-1}U$$

46

Ajustamento: Método Paramétrico

f) Variância da observação de peso unitário a posteriori

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T PV}{n-u} = \frac{V^T PV}{9-5}$$

47

Ajustamento: Método Paramétrico

g) MVC dos parâmetros

$$\Sigma_{X_a} = \Sigma_X = \hat{\sigma}_0^2 N^{-1}$$

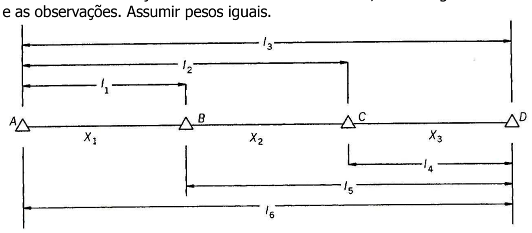
48

Ajustamento: Método Paramétrico

h) Parâmetros ajustados com precisões

Ajustamento: Método Paramétrico

Calcular a distância ajustada AD e o seu erro estimado, dada a figura abaixo e as observações. Assumir pesos iguais.



Observações	Distâncias (m)	Observações	Distâncias (m)
1	100,01	4	99,94
2	200,00	5	200,02
3	300,02	6	299,98

Ajustamento: Método Paramétrico

a) Modelo matemático $L_a = L_b + V$

Ajustamento: Método Paramétrico

b) Matriz das Observações

c) Matriz dos Pesos

Ajustamento: Método Paramétrico

d) Matriz A

No FreeMat...

Ajustamento: Método Paramétrico

e) Equações Normais

$$N = A^T PA =$$

$$U = -A^T PL_b$$

V = AX – Lb =

$$X = -N^{-1}U$$

Ajustamento: Método Paramétrico

f) Variância da observação de peso unitário a posteriori

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{V^T PV}{n-u} = \frac{V^T PV}{6-3}$$

g) MVC dos parâmetros

$$\Sigma_{X_a} = \Sigma_X = \hat{\sigma}_0^2 N^{-1}$$

55

Ajustamento: Método Paramétrico

h) Distância ajustada AD

$$\overline{AD} = x_{1a} + x_{2a} + x_{3a} =$$

$$\Sigma_{\overline{AD}} = [1 \quad 1 \quad 1]\Sigma_{X_a}[1 \quad 1 \quad 1]^T =$$

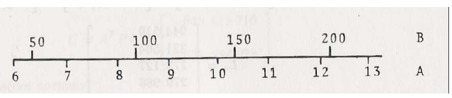
➔

56

Ajustamento: Método Paramétrico

As duas escalas abaixo representadas são uniformes; foram realizadas seis leituras da escala B em correspondência a valores cheios da escala A:

A	B
7	63,10
8	89,15
10	141,40
12	193,45
13	219,50
14	245,60



As observações não são consistentes entre si. Ajustar os valores observados exprimindo uma unidade da escala A em unidades da escala B.

57

Ajustamento: Método Paramétrico

a) Modelo matemático $L_a = F(X_a)$

Ajustamento: Método Paramétrico

b) Valores aproximados (esquecendo-se que o modelo é linear)

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63{,}10 \\ 26{,}05 \end{bmatrix}$$

$L_0 = F(X_0)$ $L = L_0 - L_b$

Ajustamento: Método Paramétrico

b) Matriz A

c) Equações normais: N e U (fazendo P=I)

$$N = A^T A$$

$$N^{-1} =$$

$$U = A^T L$$

$$X = -N^{-1}U = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Ajustamento: Método Paramétrico

d) Parâmetros

$$X_a = X_0 + X$$

e) Conjunto de observações ajustadas

61

Ajustamento: Método Paramétrico

d) Resíduos

$$V = AX + L$$

e) Variância a posteriori

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T PV}{n-u} =$$

f) Variância dos parâmetros ajustados

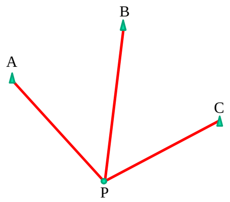
$$\sum_{X_a} = \hat{\sigma}_0^2 N^{-1} =$$

62

Ajustamento: Método Paramétrico

Determinar as coordenadas planas (x,y) do ponto P, a partir da medida de três distâncias de pontos conhecidos A, B e C, a P.

Ponto	X (m)	Y(m)
A	200,00	400,00
B	600,00	700,00
C	1100,00	300,00



Coordenadas aproximadas de P = (585,00; 112,00)m
Distâncias medidas com σ = 0,05m
AP = 499,92m
BP = 600,02m
CP = 538,48m

63

Ajustamento: Método Paramétrico

1) Modelo Matemático

64

Ajustamento: Método Paramétrico

2) Modelo linearizado por Taylor AX+L = V

a) Cálculo de L

65

Ajustamento: Método Paramétrico

$$L = L_0 - L_b$$

66

Ajustamento: Método Paramétrico

b) Cálculo da matriz A

$$A = \left.\frac{\partial F}{\partial Xa}\right|_{X_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial l_{1a}}{\partial x_a} & \frac{\partial l_{1a}}{\partial y_a} \\ \frac{\partial l_{2a}}{\partial x_a} & \frac{\partial l_{2a}}{\partial y_a} \\ \frac{\partial l_{3a}}{\partial x_a} & \frac{\partial l_{3a}}{\partial y_a} \end{bmatrix}_{X_a = X_0}$$

67

Ajustamento: Método Paramétrico

c) Matriz dos Pesos $P = Q^{-1} = \sigma_0^2 \Sigma_{L_b}^{-1}$

d) Cálculo de N^{-1}

$$N = A^T P A$$

68

Ajustamento: Método Paramétrico

e) Cálculo de U

$$U = A^T P L$$

f) Cálculo das equações normais

$$X = -N^{-1} U$$

g) Parâmetros

$$X_a = X_0 + X$$

69

Ajustamento: Método Paramétrico

No FreeMat...

70

Ajustamento: Método Paramétrico

No FreeMat...

71

Ajustamento: Método Paramétrico

g) Parâmetros

$$X_a = X_0 + X$$

h) Variância da observação de peso unitário

$$V^T PV = L^T PL + X^T U$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T PV}{n-u}$$

72

Ajustamento: Método Paramétrico

i) MVC dos parâmetros

$$\Sigma_{X_a} = \Sigma_X = \hat{\sigma}_0^2 N^{-1}$$

73

Ajustamento: Método Paramétrico

j) Valores observados ajustados

$$V = AX + L$$

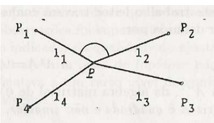
$$L_a = L_b + V$$

74

Ajustamento: Método Paramétrico

São conhecidas as coordenadas dos vértices P_1, P_2, P_3 e P_4 e foram observadas as distâncias dos mesmos a uma estação desconhecida P, bem como o ângulo P_1PP_2. Calcular as coordenadas da estação P.

	x (m)	y (m)
P_1	842,281	925,523
P_2	1337,544	996,249
P_3	1831,727	723,962
P_4	840,408	658,345



l_i	Distância (m)	±m
l_1	244,512	0,012
l_2	321,570	0,016
l_3	773,154	0,038
l_4	279,992	0,014
	Ângulo	
	123° 38′ 01,4″	2,0″

Solução aproximada

$$X_0 = [1065{,}2 \quad 825{,}2]^T$$

75

Ajustamento: Método Paramétrico

1) Modelo Matemático

$$X_a = [x_a \quad y_a]^T$$
$$l_i^a = l_i^b + v_i = \sqrt{(x_i - x_a)^2 + (y_i - y_a)^2} \quad \leftarrow \quad i = 1..4$$
$$l_5^a = l_5^b + v_5 = tg^{-1}\left(\frac{x_2 - x_a}{y_2 - y_a}\right) + tg^{-1}\left(\frac{x_a - x_1}{y_1 - y_a}\right)$$
$$L_a = F(X_a)$$

76

Ajustamento: Método Paramétrico

1) Modelo Matemático

$$l_1^a = l_1^b + v_1 = \sqrt{(x_1 - x_a)^2 + (y_1 - y_a)^2}$$
$$l_2^a = l_2^b + v_2 = \sqrt{(x_2 - x_a)^2 + (y_2 - y_a)^2}$$
$$l_3^a = l_3^b + v_3 = \sqrt{(x_3 - x_a)^2 + (y_3 - y_a)^2}$$
$$l_4^a = l_4^b + v_4 = \sqrt{(x_4 - x_a)^2 + (y_4 - y_a)^2}$$
$$l_5^a = l_5^b + v_5 = tg^{-1}\left(\frac{x_2 - x_a}{y_2 - y_a}\right) + tg^{-1}\left(\frac{x_a - x_1}{y_1 - y_a}\right)$$

77

Ajustamento: Método Paramétrico

2) Modelo linearizado por Taylor AX+L = V

a) Cálculo de L

$$L = L_0 - L_b = F(X_o) - L_b$$
$$X_0 = [1065{,}2 \quad 825{,}2]^T$$

Para o cálculo de L_o substitui-se X_a por X_o no modelo matemático. L_b são as observações efetuadas.

$$l_1^0 = \sqrt{(842{,}281 - 1065{,}2)^2 + (925{,}523 - 825{,}2)^2} =$$
$$l_2^0 =$$
$$l_3^0 =$$
$$l_4^0 =$$
$$l_5^0 =$$

78

Ajustamento: Método Paramétrico

$$L = L_0 - L_b$$

79

Ajustamento: Método Paramétrico

b) Cálculo da matriz A

$$A = \left.\frac{\partial F}{\partial Xa}\right|_{X_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial l_{1a}}{\partial x_a} & \frac{\partial l_{1a}}{\partial y_a} \\ \frac{\partial l_{2a}}{\partial x_a} & \frac{\partial l_{2a}}{\partial y_a} \\ \frac{\partial l_{3a}}{\partial x_a} & \frac{\partial l_{3a}}{\partial y_a} \\ \frac{\partial l_{4a}}{\partial x_a} & \frac{\partial l_{4a}}{\partial y_a} \\ \frac{\partial l_{5a}}{\partial x_a} & \frac{\partial l_{5a}}{\partial y_a} \end{bmatrix}_{X_a = X_0}$$

$$\frac{\partial l_{ia}}{\partial x_a} = -\frac{x_i - x_a}{l_{ia}} \qquad \frac{\partial l_{ia}}{\partial y_a} = -\frac{y_i - y_a}{l_{ia}} \leftarrow \quad i = 1..4$$

$$\frac{\partial l_{1a}}{\partial x_a} = -\frac{x_1 - x_a}{l_{1a}} \qquad \frac{\partial l_{1a}}{\partial y_a} = -\frac{y_1 - y_a}{l_{1a}}$$

$$\frac{\partial l_{5a}}{\partial x_a} = -\frac{y_2 - y_a}{l_{2a}^2} + \frac{y_1 - y_a}{l_{1a}^2}$$

$$\frac{\partial l_{5a}}{\partial y_a} = \frac{x_2 - x_a}{l_{2a}^2} - \frac{x_1 - x_a}{l_{1a}^2}$$

80

Ajustamento: Método Paramétrico

c) Matriz dos Pesos

$$P = Q^{-1} = \sigma_0^2 \Sigma_{L_b}^{-1}$$

d) Cálculo de N^{-1}

$$N = A^T P A$$

81

Ajustamento: Método Paramétrico

e) Cálculo de U

$$U = A^T PL$$

f) Cálculo das equações normais

$$X = -N^{-1}U$$

g) Parâmetros

$$X_a = X_0 + X$$

h) Variância da observação de peso unitário

$$V^T PV = L^T PL + X^T U$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T PV}{n-u}$$

82

Ajustamento: Método Paramétrico

i) MVC dos parâmetros

$$\Sigma_{X_a} = \Sigma_X = \hat{\sigma}_0^2 N^{-1}$$

83

Ajustamento: Método Paramétrico

j) Valores observados ajustados

$$L_a = L_b + V$$

$$V = AX + L$$

84

Ajustamento: Método Paramétrico

No FreeMat...

85

Ajustamento: Método Paramétrico

No FreeMat...

86

Ajustamento: Método Paramétrico

No FreeMat...

87

Ajustamento: Método Paramétrico

Calcule as coordenadas cartesianas de um receptor GPS, no WGS-84, relativas a um único instante de observação T, sendo dadas as coordenadas cartesianas de 4 satélites, no sistema WGS-84, no mesmo instante T, e as pseudo-distâncias (código C/A) observadas para os satélites. Calcule também os resíduos, o desvio padrão, a variância a posteriori, e o fator GDOP. Para efeito deste cálculo negligenciar os demais termos da equação da pseudo-distância.

Fator GDOP = $\sqrt{traço(N^{-1})}$

Coordenadas XYZ aproximadas iniciais da estação

X(m)	Y(m)	Z(m)
3764078	-4507379	-2483874

Efemérides transmitidas dos satélites (WGS-84)

ISV#	GPS time(s)	X(m)	Y(m)	Z(m)	Pseudo-distâncias observadas (m)
3	21600,00	14205954,236	-4194834,743	-22400539,043	**22490085,705840**
17	21600,00	9056691,070	-16873854,251	-18641462,109	**21024011,346767**
20	21600,00	19430645,714	-17416883,593	4840946,756	**21581232,110490**
23	21600,00	17393573,455	-19867331,192	1287494,324	**20878563,742011**

88

Ajustamento: Método Paramétrico

1) Modelo Matemático

$$l_1^a = l_1^b + v_1 = \sqrt{(x_1 - x_a)^2 + (y_1 - y_a)^2 + (z_1 - z_a)^2}$$
$$l_2^a = l_2^b + v_2 = \sqrt{(x_2 - x_a)^2 + (y_2 - y_a)^2 + (z_2 - z_a)^2}$$
$$l_3^a = l_3^b + v_3 = \sqrt{(x_3 - x_a)^2 + (y_3 - y_a)^2 + (z_3 - z_a)^2}$$
$$l_4^a = l_4^b + v_4 = \sqrt{(x_4 - x_a)^2 + (y_4 - y_a)^2 + (z_4 - z_a)^2}$$

89

Ajustamento: Método Paramétrico

2) Vetor das observações

3) Função dos parâmetros

$$l_i^a = l_i^b + v_i = \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + (z_i - z_0)^2}$$

$$L_0 = F(X_0)$$

90

Ajustamento: Método Paramétrico

4) Modelo linearizado por Taylor AX+L = V

a) Cálculo de L

Ajustamento: Método Paramétrico

b) Cálculo da matriz A

$$A = \left.\frac{\partial F}{\partial Xa}\right|_{X_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial l_{1a}}{\partial x_a} & \frac{\partial l_{1a}}{\partial y_a} & \frac{\partial l_{1a}}{\partial z_a} \\ \frac{\partial l_{2a}}{\partial x_a} & \frac{\partial l_{2a}}{\partial y_a} & \frac{\partial l_{2a}}{\partial z_a} \\ \frac{\partial l_{3a}}{\partial x_a} & \frac{\partial l_{3a}}{\partial y_a} & \frac{\partial l_{3a}}{\partial z_a} \\ \frac{\partial l_{4a}}{\partial x_a} & \frac{\partial l_{4a}}{\partial y_a} & \frac{\partial l_{4a}}{\partial z_a} \end{bmatrix}_{X_a = X_0}$$

$$i = 1..4 \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial l_{ia}}{\partial x_a} = \frac{x_a - x_i}{l_{ia}} \\ \frac{\partial l_{ia}}{\partial y_a} = \frac{y_a - y_i}{l_{ia}} \\ \frac{\partial l_{ia}}{\partial z_a} = \frac{z_a - z_i}{l_{ia}} \end{cases}$$

Ajustamento: Método Paramétrico

c) Matriz dos Pesos $P = Q^{-1} = \sigma_0^2 \Sigma_{L_b}^{-1}$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d) Cálculo de N

$$N = A^T P A$$

Ajustamento: Método Paramétrico

e) Cálculo de U

$$U = A^T PL$$

f) Cálculo das equações normais

$$X = -N^{-1}U$$

g) Parâmetros

$$X_a = X_0 + X$$

94

Ajustamento: Método Paramétrico

5) Iteração #1

$$X = -N^{-1}U$$

$$X_a = X_0 + X$$

6) Vetor de resíduos

$$V = AX + L$$

95

Ajustamento: Método Paramétrico

7) Variância a posteriori: estimador imparcial da variância a priori

$$V^T PV = L^T PL + X^T U$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T PV}{n-u}$$

96

Ajustamento: Método Paramétrico

8) Teste de hipótese: comparação entre σ_0^2 e $\hat{\sigma}_0^2$

Testamos a hipótese básica: $H_0: \ \sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2$

contra a hipótese alternativa: $H_1: \ \sigma_0^2 \neq \hat{\sigma}_0^2$

comparando o valor calculado $\chi^{*2} = \dfrac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}\nu = \dfrac{V^T PV}{\sigma_0^2}$

com os valores teóricos (tabelados) $\chi^2_{\nu,1-\alpha/2}$ e $\chi^2_{\nu,\alpha/2}$

A hipótese básica não é rejeitada, ao nível de significância α, se

$$\chi^2_{\nu,\alpha/2} < \chi^{*2} < \chi^2_{\nu,1-\alpha/2}$$

97

Ajustamento: Método Paramétrico

7) Variância a posteriori: estimador imparcial da variância a priori

$$V^T PV = L^T PL + X^T U$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T PV}{n-u}$$

De tabela (qui-quadrado), para α = 5%, obtem-se:

98

Ajustamento: Método Paramétrico

9) MVC dos parâmetros

$$\Sigma_{X_a} = \Sigma_X = \hat{\sigma}_0^2 N^{-1}$$

99

Ajustamento: Método Paramétrico

10) Valores observados ajustados

$$L_a = L_b + V$$

100

Ajustamento: Método Paramétrico

No FreeMat...

101

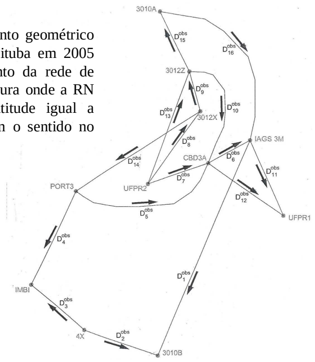
Ajustamento: Método Paramétrico

No FreeMat...

102

Ajustamento: Método Paramétrico

As campanhas de nivelamento geométrico realizadas no porto de Imbituba em 2005 permitiram o estabelecimento da rede de nivelamento indicada na figura onde a RN IAGS 3M possui uma altitude igual a 6,5553m e as setas indicam o sentido no qual o terreno se eleva.



103

Ajustamento: Método Paramétrico

TABELA A1.1 – OBSERVAÇÕES DE CAMPO – NIVELAMENTO GEOMÉTRICO

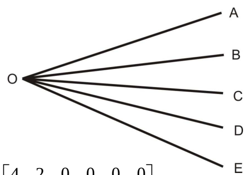
Seção (D_i^{obs})	RRNN ocupadas	Desnível Observado (m)	Comprimento da Seção (m)
D_1^{obs}	IAGS 3M – 3010B	2,92432	904,475
D_2^{obs}	3010B – 4X	-0,83761	202,145
D_3^{obs}	4X – IMBI	1,86628	83,665
D_4^{obs}	IMBI – PORT3	-4,48378	706,515
D_5^{obs}	PORT3 – CBD3A	0,11601	476,405
D_6^{obs}	CBD3A – IAGS 3M	0,41485	20,200
D_7^{obs}	CBD3A – UFPR2	-4,31066	165,680
D_8^{obs}	UFPR2 – 3012X	0,17910	54,465
D_9^{obs}	3012X – 3012Z	0,08988	40,250
D_{10}^{obs}	3012Z – CBD3A	4,04480	341,635
D_{11}^{obs}	IAGS 3M – UFPR1	0,33382	91,630
D_{12}^{obs}	UFPR1 – CBD3A	-0,74860	82,990
D_{13}^{obs}	UFPR2 – 3012Z	0,26859	79,635
D_{14}^{obs}	PORT3 – 3012X	-4,01655	438,474
D_{15}^{obs}	3012Z – 3010A	4,06107	414,985
D_{16}^{obs}	3010A – IAGS 3M	0,39461	345,365

104

Ajustamento: Método Paramétrico

Com referência à figura abaixo, os seguintes ângulos foram observados

Nome	Ângulo	Observação
l_1	AOB	10°00′00″
l_2	BOC	8°00′00″
l_3	AOC	18°00′07″
l_4	COD	5°00′00″
l_5	DOE	12°00′00″
l_6	BOE	25°00′12″



A MVC dos ângulos observados é
$$\Sigma_l = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$
em segundos² de arco

Estimar o ângulo COD.

105

Ajustamento: Método Paramétrico

a) Modelo matemático $L_a = L_b + V$

106

Ajustamento: Método Paramétrico

b) Matriz das Observações

c) Matriz dos Pesos

107

Ajustamento: Método Paramétrico

d) Matriz A

e) Solução Inicial

108

Ajustamento: Método Paramétrico

f) Equações Normais

$$N = A^T PA =$$

$$U = A^T PL =$$

$$X = -N^{-1}U$$

Ajustamento: Método Paramétrico

g) Variância a posteriori → **Observações foram superestimadas!**

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T PV}{n-u} = \frac{V^T PV}{6-4} =$$

h) Análise da qualidade do ajustamento: Teste de hipótese

Hipótese básica $H_0 : \ \sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2$

Hipótese alternativa $H_1 : \ \sigma_0^2 \neq \hat{\sigma}_0^2$

Cálculo → $\chi^2 = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \nu = \frac{V^T PV}{\sigma_0^2} =$

Da tabela, com α = 5% →

Ajustamento: Método Paramétrico

No FreeMat...

Ajustamento: Método Paramétrico

Má qualidade de ajustamento: Possíveis causas

a) MVC dos valores observados;
b) Resíduos excessivamente grandes em decorrência de falta grosseira ou erros sistemáticos;
c) Modelo matemático não consistente com as observações;
d) Sistema mal condicionado;
e) etc...

112

Ajustamento: Método Paramétrico

No exercício anterior, sejam as observações realizadas com desvio padrão = 5".

$$\sigma_i = 5'' \rightarrow \Sigma_{L_b} = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \hat{\sigma}_0^2 = 0{,}8364$$

Tendo em vista as observações efetuadas, verifica-se que desvio padrão de 5" é subestimação de precisão.

113

Ajustamento: Método Paramétrico

i) Parâmetros e MVC

Intervalo de confiança de 99%

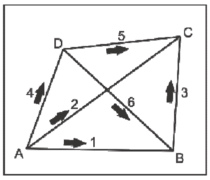
114

Ajustamento: Método Paramétrico

No FreeMat...

Ajustamento: Método Paramétrico

O quadro e o esquema que se seguem resumem um nivelamento geométrico que partiu da referência de nível A, de altitude 675,234m; as setas indicam o sentido em que o terreno se eleva.



LINHA	DESNÍVEL (m)	COMPRIMENTO (km)
1	10,164	3,83
2	20,741	2,11
3	10,577	1,98
4	1,799	4,56
5	19,107	2,35
6	8,366	4,78

Estimar as altitudes das estações B, C e D pelo método dos parâmetros.
Obs.: Tomar pesos inversamente proporcionais ao comprimento das linhas.

Ajustamento: Método Paramétrico

a) Modelo matemático $L_a = L_b + V$

$$h_B^a - H_A = 10{,}164 + v_1$$
$$h_C^a - H_A = 20{,}741 + v_2$$
$$h_C^a - h_B^a = 10{,}577 + v_3$$
$$h_D^a - H_A = 1{,}799 + v_4$$
$$h_C^a - h_D^a = 19{,}107 + v_5$$
$$h_B^a - h_D^a = 8{,}366 + v_6$$

Ajustamento: Método Paramétrico

b) Matriz das Observações

c) Lo = Vetor aproximação com parâmetros

118

Ajustamento: Método Paramétrico

d) Matriz L = Lo - Lb

119

Ajustamento: Método Paramétrico

e) Matriz dos Pesos

120

Ajustamento: Método Paramétrico

f) Matriz A

g) Equações Normais

$$N = A^T PA$$

$$U = A^T PL$$

$$X = -N^{-1}U$$

121

Ajustamento: Método Paramétrico

h) Matriz dos resíduos V

$$V = A * X + L$$

122

Ajustamento: Método Paramétrico

i) Variância a posteriori

➔ **Observações foram subestimadas!**

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T PV}{n-u} = \frac{V^T PV}{6-4} =$$

j) Análise da qualidade do ajustamento: Teste de hipótese

Hipótese básica $H_0: \ \sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2$

Hipótese alternativa $H_1: \ \sigma_0^2 \neq \hat{\sigma}_0^2$

Cálculo ➔ $\chi^2 = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \nu = \frac{V^T PV}{\sigma_0^2} =$

Da tabela, com α = 5% ➔

123

Ajustamento: Método Paramétrico

No FreeMat...

124

Ajustamento: Método Paramétrico

k) Análise da variância a posteriori

125

Ajustamento: Método Paramétrico

l) O que acontece se multiplicarmos por uma **escala** a matriz dos Pesos?

MATRIZ	SITUAÇÃO
Vetor das correções X	Invariante
Vetor dos resíduos V	Invariante
MVC dos parâmetros Σ_{X_a}	Invariante
Variância a posteriori	MUDA

126

Ajustamento: Método Paramétrico

1) Resolva o seguinte sistema de equações não lineares usando o método dos mínimos quadrados (MMQ). Use a aproximação inicial: xo = 2,1 e yo = 0,45, e faça apenas uma iteração.

$$\begin{cases} x^2 + 3xy - y^2 = 7{,}0 \\ 7x^3 - 3y^2 = 55{,}2 \\ 2x - 6xy + 3y^2 = -1{,}2 \end{cases} \qquad X_o = \begin{bmatrix} 2{,}1 \\ 0{,}45 \end{bmatrix} \qquad L_b = \begin{bmatrix} 7{,}0 \\ 55{,}2 \\ -1{,}2 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

127

Ajustamento: Método Paramétrico

128

Ajustamento: Método Paramétrico

2) Um certo fenômeno tem variação y linear com respeito a x (y = *a*x+*b*). O valor y_i foi medido para diferentes x_i, conforme dados abaixo. A abcissa x é considerada sem erro. Calcule os valores ajustados dos parâmetros *a* e *b* da função linear.

x	y medido
-6	0,10
-4	0,97
-2	2,06
0	3,11

129

Propagação de Variâncias e Covariâncias

3) Os ângulos A e B do triângulo plano ABC foram observados com a precisão $\sigma_A^2 = 3^{('')^2}$ e $\sigma_B^2 = 4^{('')^2}$. O ângulo C foi calculado por C = 180° - A - B. Estime a precisão σ_C do ângulo C computado na expressão acima.

1 equação ➔ C = 180 – A - B
2 variáveis (A, B)

$$G = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \Sigma_{AB} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_C = G * \Sigma_{AB} * G^T = 7$$

$$\sigma_C = 2{,}65''$$

```
G = [-1 -1];
mvcAB = [3 0; 0 4];
mvcC = G*mvcAB*G';
stdC = sqrt(mvcC)
```

130

Propagação de Variâncias e Covariâncias

4) Dado $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ e $\Sigma_Y = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ estime a precisão σ_Z obtida através da expressão $z = x_1 + x_2$

$$G = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \Sigma_Y = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_X = G * \Sigma_Y * G^T = \begin{bmatrix} 1{,}2222 & -0{,}7778 \\ -0{,}7778 & 1{,}2222 \end{bmatrix}$$

```
mvcY = [3 1;1 3];
G = [2 -1;-1 2]/3;
mvcX = G*mvcY*G'
G = [1 1];
mvcZ = G*mvcX*G'
```

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Sigma_Z = G * \Sigma_X * G^T = 0{,}8889$$

$$\sigma_Z = 0{,}9428$$

131

Ajustamento: Método Paramétrico

1) O gráfico da função $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ passa pelos pontos (-2; -3,400), (0,5;5,525), (1; 16,700), (2,5; 70,625) e (1,5; 27,900). Determine as constantes *a*, *b*, *c* e *d* pelo método paramétrico (MMQ), assumindo que a coordenada *x* é isenta de erro.

a) Vetor Lb

x	y
-2	-3,400
0,5	5,525
1	16,700
2,5	70,625
1,5	27,900

b) Vetor Xo

132

Ajustamento: Método Paramétrico

c) Vetor Lo

d) Vetor L = Lo - Lb

e) Matriz A

133

Ajustamento: Método Paramétrico

f) Vetor correção X

g) Vetor dos parâmetros ajustados

h) Vetor dos resíduos

134

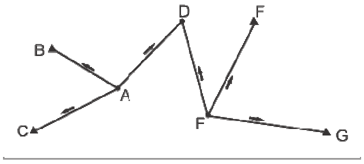
Ajustamento: Método Paramétrico

No FreeMat

135

Ajustamento: Método Paramétrico

2) Ajuste a rede de nivelamento representada na figura abaixo. As altitudes de B (849,948m), C (854,122m), F (855,195m) e G (860,626m) são consideradas fixas. Os desníveis medidos, com elevação no sentido das setas, foram: AB = 4,185m; AC= 8,340m; AD = 6,008m; ED = 4,005m; EF = 7,428m; EG = 12,851m. Considere a mesma precisão para todas as observações.



136

Ajustamento: Método Paramétrico

a) Modelo matemático funcional

b) Matriz Lb

c) Matriz Xo

d) Matriz Lo

137

Ajustamento: Método Paramétrico

e) Matriz A

h) Vetor dos Resíduos V

f) Vetor das correções X

g) Vetor dos Parâmetros ajustados Xa

138

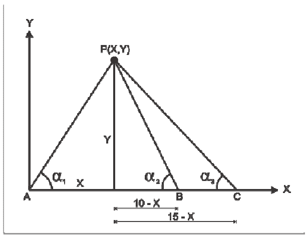
Ajustamento: Método Paramétrico

No FreeMat...

139

Ajustamento: Método Paramétrico

3) Na figura abaixo, os pontos A (0;0)m; B (10;0)m e C (15;0)m tem suas coordenadas conhecidas e isentas de erros (fixas). Os valores dos ângulos observados são α_1 = 45º00' com σ =2', α_2 = 66º48' com σ =2' e α_3 = 41º11' com σ =1'. A distância PA = 9,910m foi medida com σ =5mm. Os parâmetros (X,Y) aproximados são (6,4; 6,6)m. Determine as coordenadas planas do ponto P(X,Y) no referencial AXY com suas respectivas precisões, e analise a variância a posteriori.



140

Ajustamento: Método Paramétrico

a) Modelo matemático funcional

141

Ajustamento: Método Paramétrico

b) Matriz Lb

c) Matriz Xo

d) Matriz Lo

e) Matriz L = Lo - Lb

142

Ajustamento: Método Paramétrico

f) Matriz A

143

Ajustamento: Método Paramétrico

g) Vetor dos Pesos P

144

Ajustamento: Método Paramétrico

h) Vetor das correções X

Primeira iteração →

Segunda iteração →

i) Vetor dos parâmetros Xa, após duas iterações

145

Ajustamento: Método Paramétrico

j) Variância a posteriori → **Observações foram superestimadas!**

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T PV}{n-u} = \frac{V^T PV}{4-2} =$$

k) Análise da qualidade do ajustamento: Teste de hipótese

Hipótese básica $H_0 : \ \sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2$

Hipótese alternativa $H_1 : \ \sigma_0^2 \neq \hat{\sigma}_0^2$

Cálculo → $\chi^2 = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} v = \frac{V^T PV}{\sigma_0^2} = \ 3{,}7350$

Da tabela, com α = 5% →

146

Ajustamento: Método Paramétrico

l) MVC dos parâmetros ajustados

m) Parâmetros ajustados

147

Ajustamento: Método Paramétrico

No FreeMat...

148

Ajustamento: Método Paramétrico

No FreeMat...

149

Ajustamento: Método Paramétrico

Microsoft Equation 3.0

150