



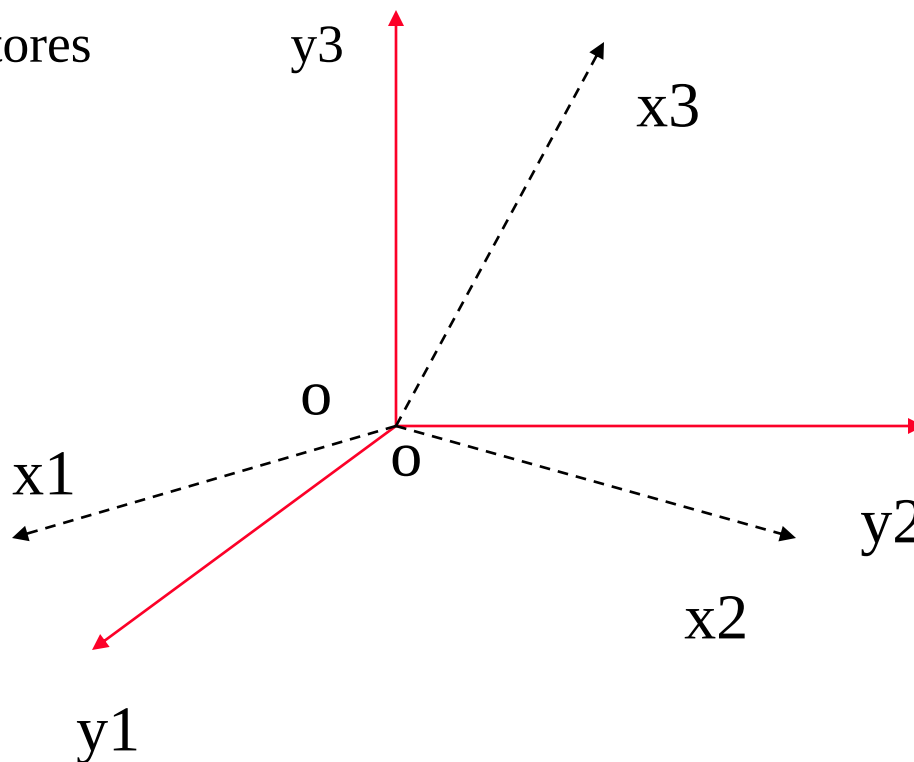
MATRIZES DE ROTAÇÃO

rotação de eixos em função de
co-senos diretores

Prof. Dr. Carlos Aurélio Nadal

MATRIZES DE ROTAÇÃO

- * dois ternos dextrógiros com mesma origem
- * x_1, x_2, x_3 novas coordenadas
- * y_1, y_2, y_3 antigas coordenadas
- * l_{ij} = co-senos diretores



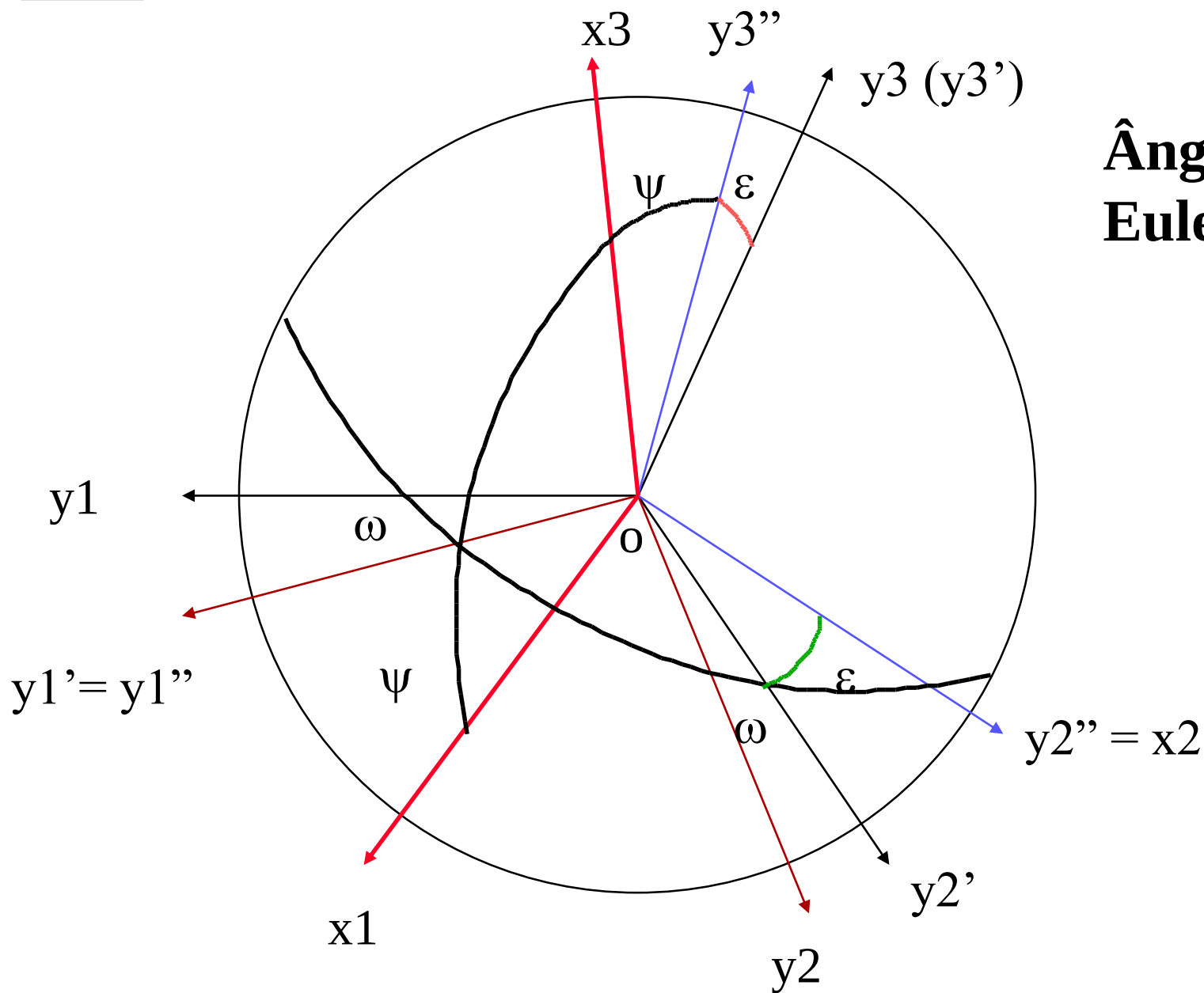
CAN

Fórmulas de Euler

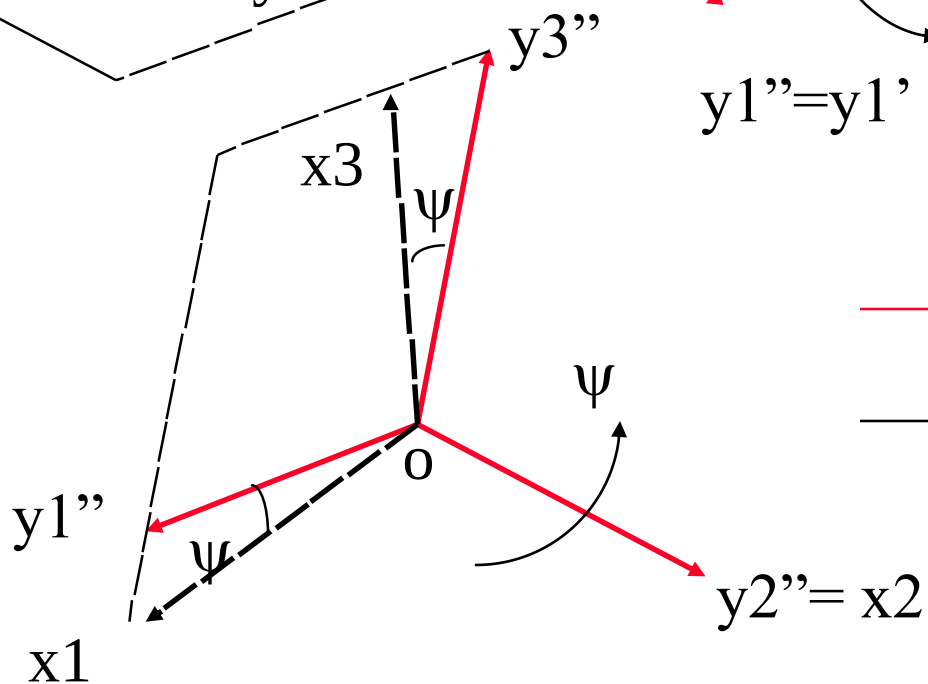
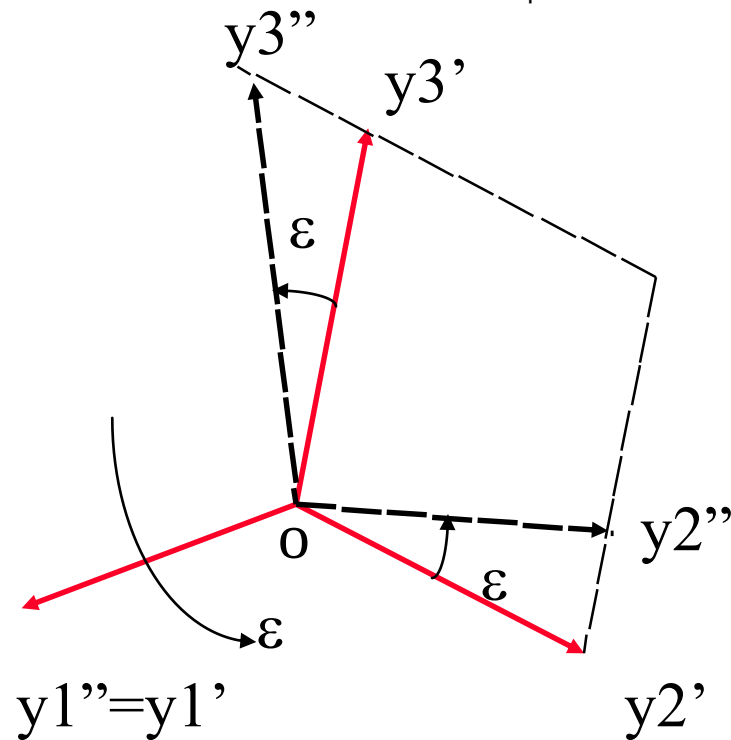
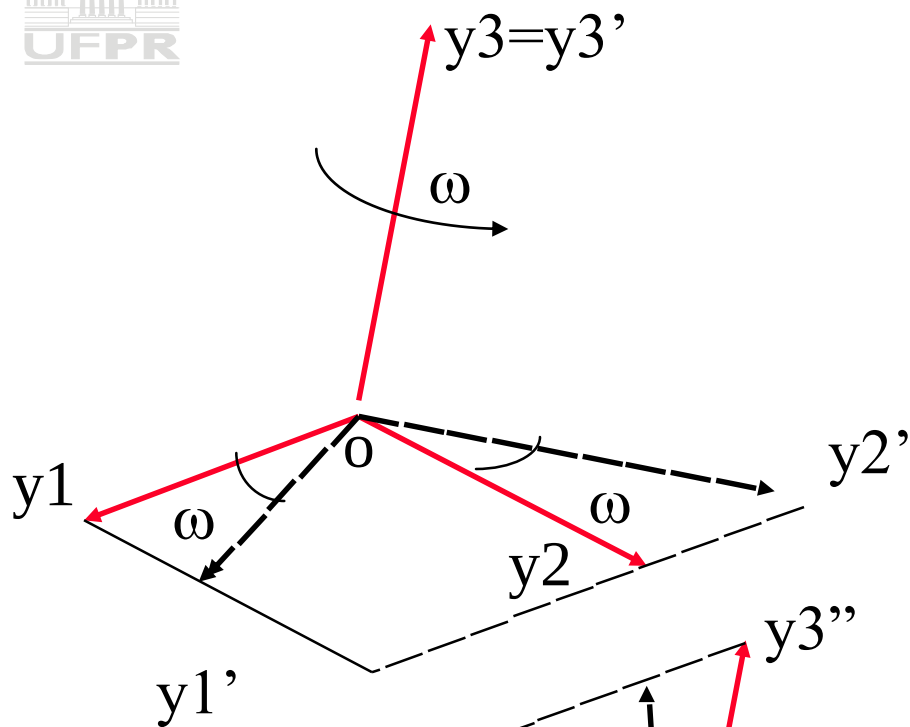
- $X = L Y$
- L = matriz dos co-senos diretores

$$L = \begin{vmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{vmatrix}$$

- os co-senos da matriz L não são independentes
- dos nove somente três são independentes
- fórmulas de Euler



Ângulos de Euler



— antigo
— novo

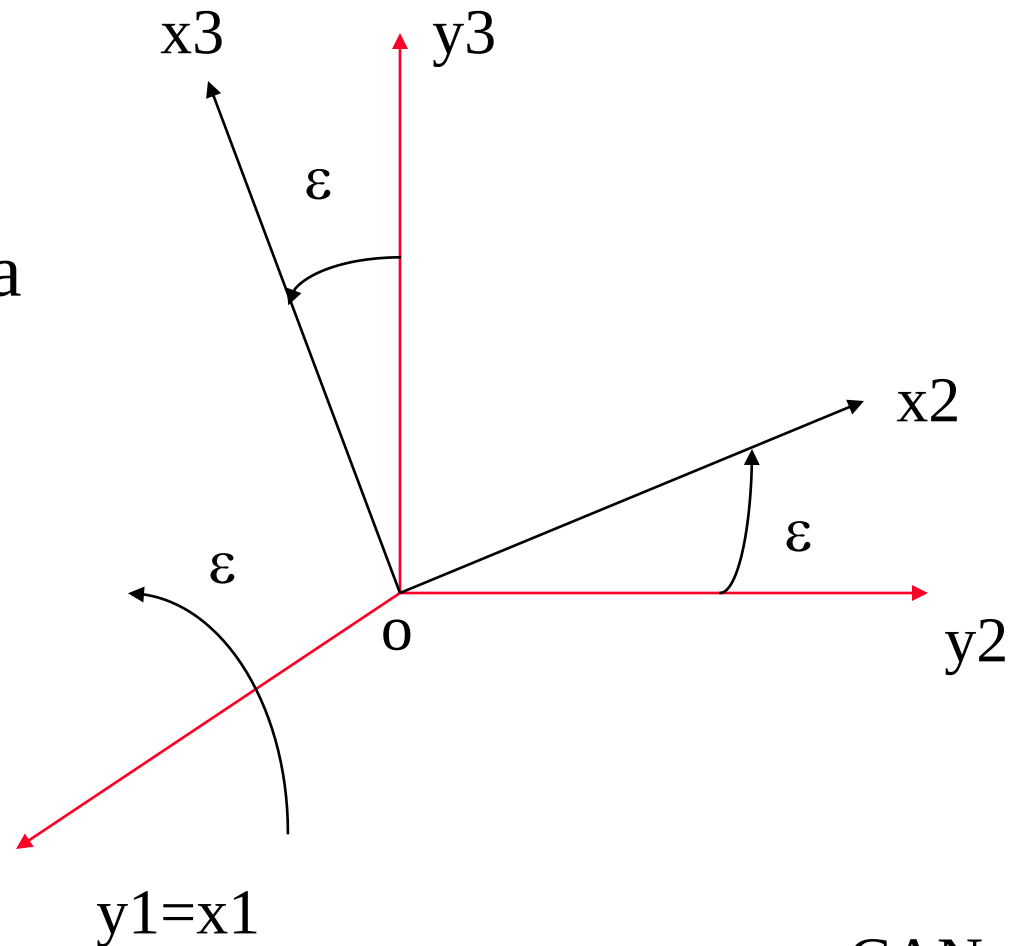
CAN

ângulo de rotação - convenções

- ângulo de rotação positivo
- rotação anti-horária
- terno dextrógiro

— antigo

— novo



CAN

matrizes de rotação

Rotação em torno do eixo 1

$$R1(\alpha) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}$$

Rotação em torno do eixo 2

$$R2(\alpha) = \begin{vmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{vmatrix}$$

Rotação em torno do eixo 3

$$R3(\alpha) = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Propriedades das matrizes de rotação

- Reflexão: é um caso particular da transformação com $\alpha = 180^\circ$
- $M^T = M^{-1}$
- $|M| = + \text{ ou } - 1$
- $[R(\alpha)]^{-1} = R(-\alpha)$
- $R_1[R_2R_3] = [R_1R_2]R_3$
- $R_i(\alpha) R_i(\beta) = R_i(\alpha + \beta)$
- mais importante no cálculo computacional
 $R_1[R_2R_3] = [R_1R_2]R_3$
pois economiza tempo de computação

matrizes de reflexão

Reflexão do eixo 1

$$R1 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Reflexão do eixo 2

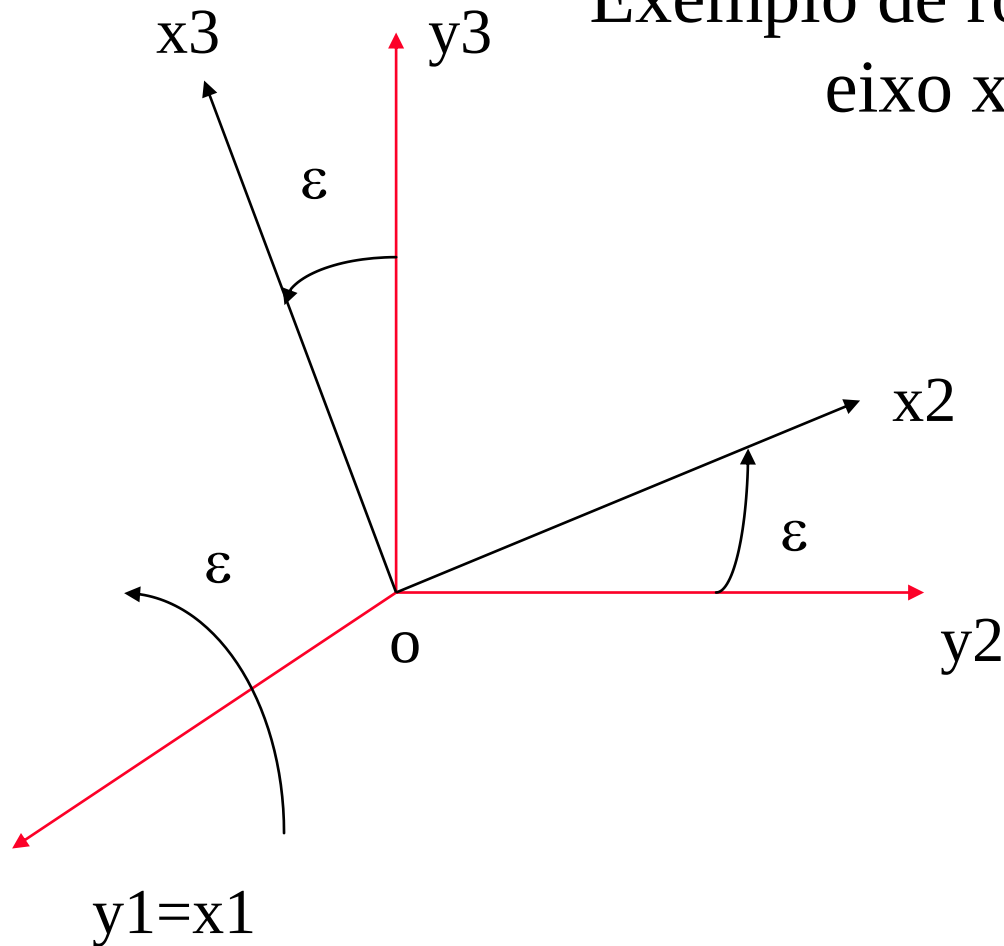
$$R2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Reflexão do eixo 3

$$R3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Utilizada para transformar um sistema dextrógiro em levógiro ou vice-versa

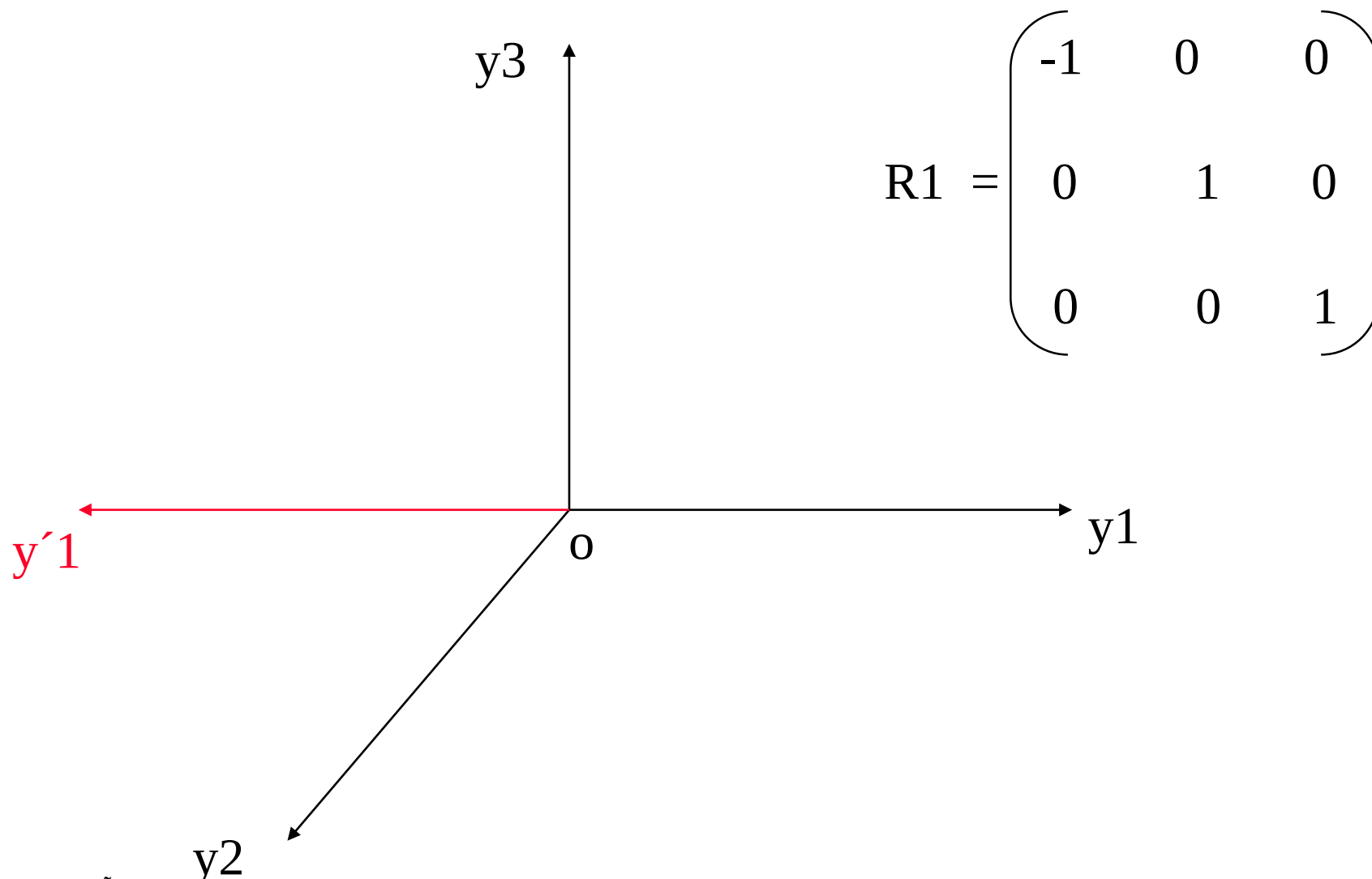
Exemplo de rotação em torno do eixo x, do tipo 1.



$$R1(\epsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \epsilon & \sin \epsilon \\ 0 & -\sin \epsilon & \cos \epsilon \end{pmatrix}$$

Exemplo de reflexão do eixo x, do tipo 1.

Transformação de sistema levógiro em dextrógiro



Transformação de coordenadas Astronômicas

horizontais $\rightarrow$ horárias

horárias $\rightarrow$ equatoriais

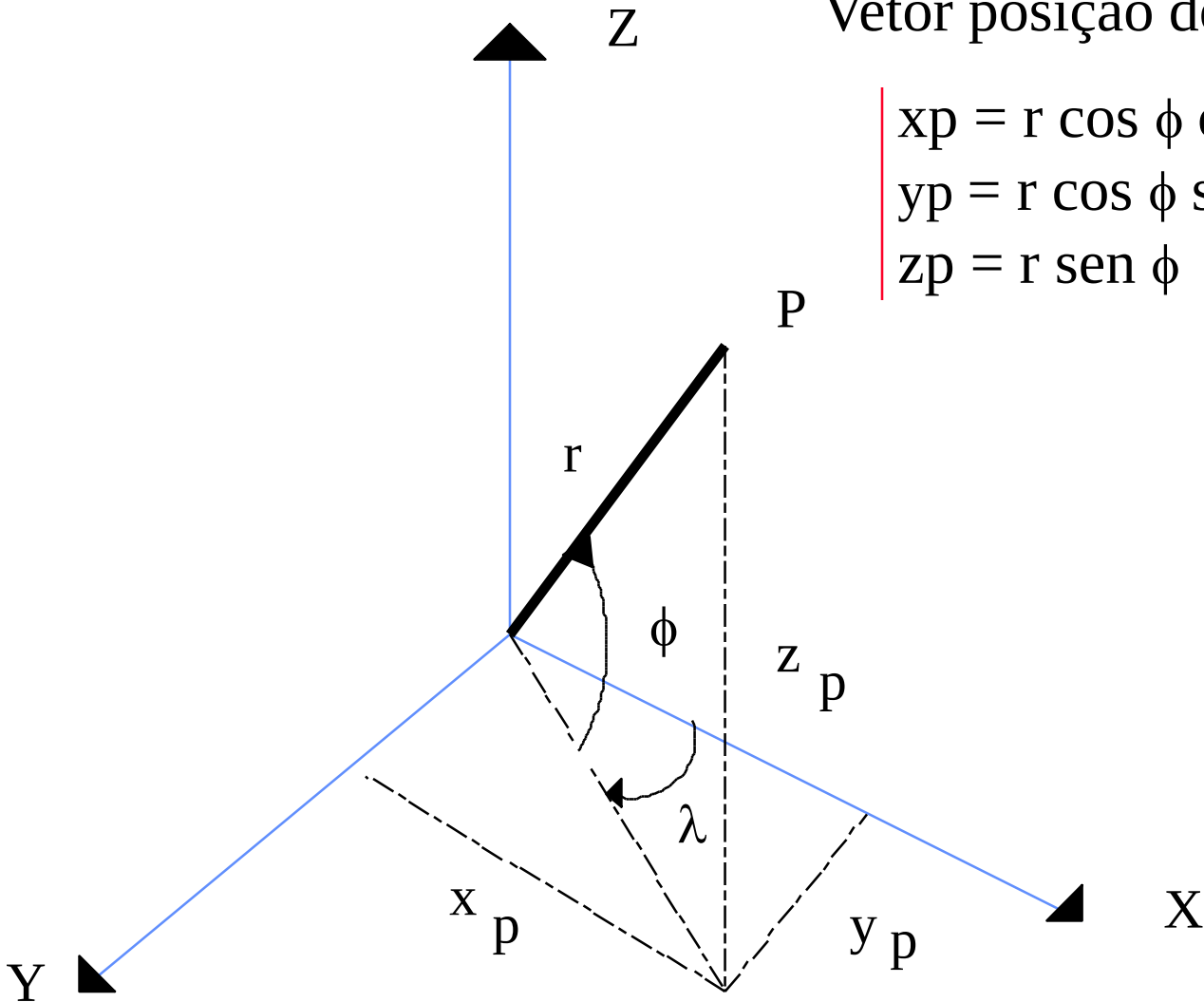
equatoriais $\rightarrow$ eclípticas

Vetor posição do ponto P

$$x_p = r \cos \phi \cos \lambda$$

$$y_p = r \cos \phi \sin \lambda$$

$$z_p = r \sin \phi$$



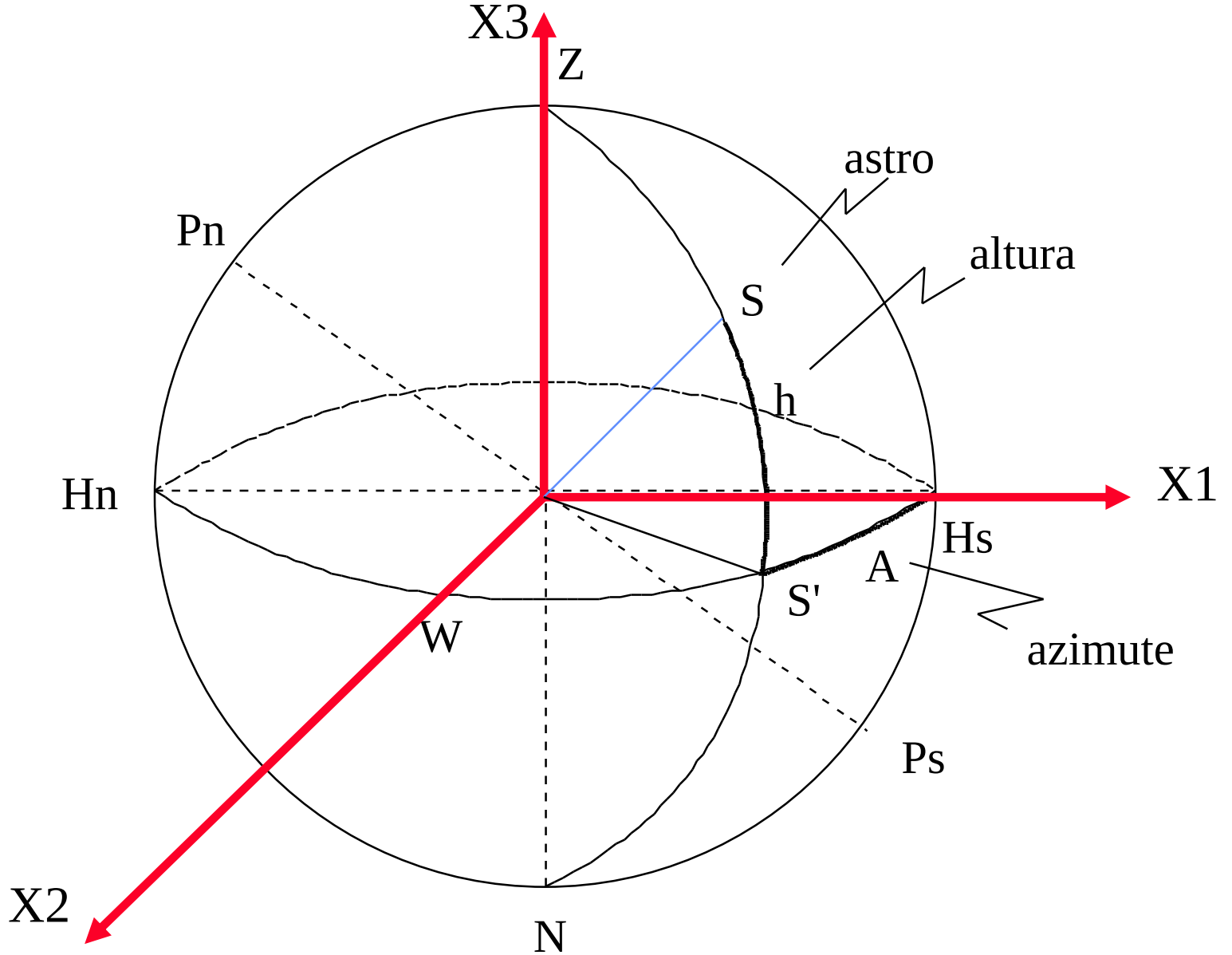
Sistema de coordenadas cartesianas.
associado à Terra suposta esférica



RESUMO DAS COORDENADAS CELESTES

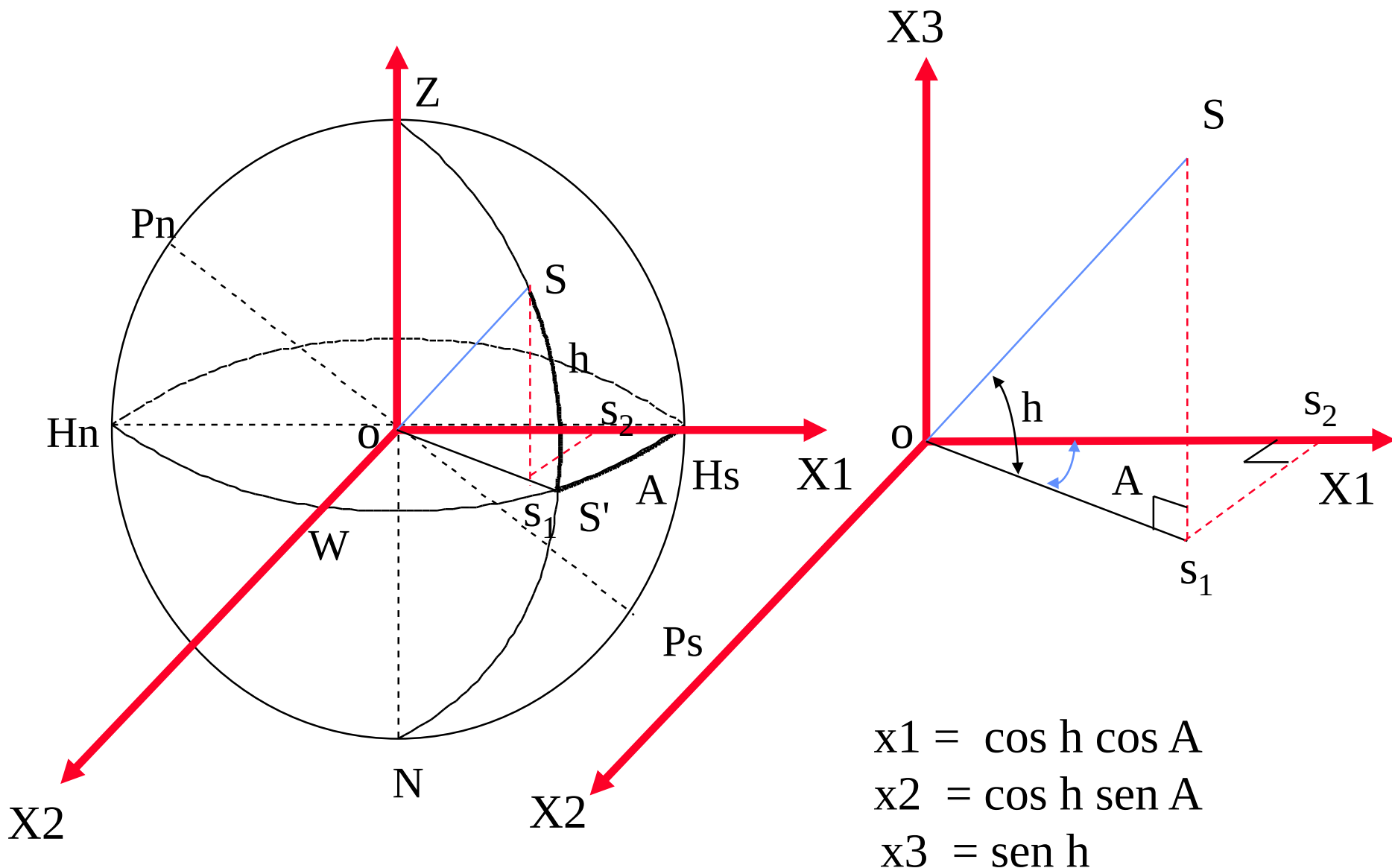
sistema	horizontal	horário	equatorial	eclítico
plano	horizonte	equador	equador	eclíptica
fundamental				
Abcissa	Azimute	ângulo	ascensão	longitude
símbolo	(A)	horário (H)	reta (α)	celeste (λ)
origem	ponto sul	SMS	ponto vernal	ponto vernal
sentido	retrógrado (por oeste)	retrógrado (por oeste)	direto	direto
variação	0° a 360°	0h a 24h	0h a 24h	0h a 24h
Ordenada	altura (h)	declinação	declinação	latitude
símbolo	dist zenital(z)	(δ)	(δ)	celeste (β)
variação	0° a $\pm$ 90°	0° a $\pm$ 90°	0° a $\pm$ 90°	0° a $\pm$ 90°

Coordenadas horizontais (X, h, A)



Vetor posição da estrela no sistema de coordenadas

X3 horizontais





VETOR POSIÇÃO DE UM ASTRO

a) no sistema de coordenadas horizontais

$$x_1 = \cos h \cos A$$

$$x_2 = \cos h \sin A$$

$$x_3 = \sin h$$

b) no sistema de coordenadas horárias

$$y_1 = \cos \delta \cos H$$

$$y_2 = \cos \delta \sin H$$

$$y_3 = \sin \delta$$

c) no sistema de coordenadas equatoriais

$$z_1 = \cos \delta \cos \alpha$$

$$z_2 = \cos \delta \sin \alpha$$

$$z_3 = \sin \delta$$

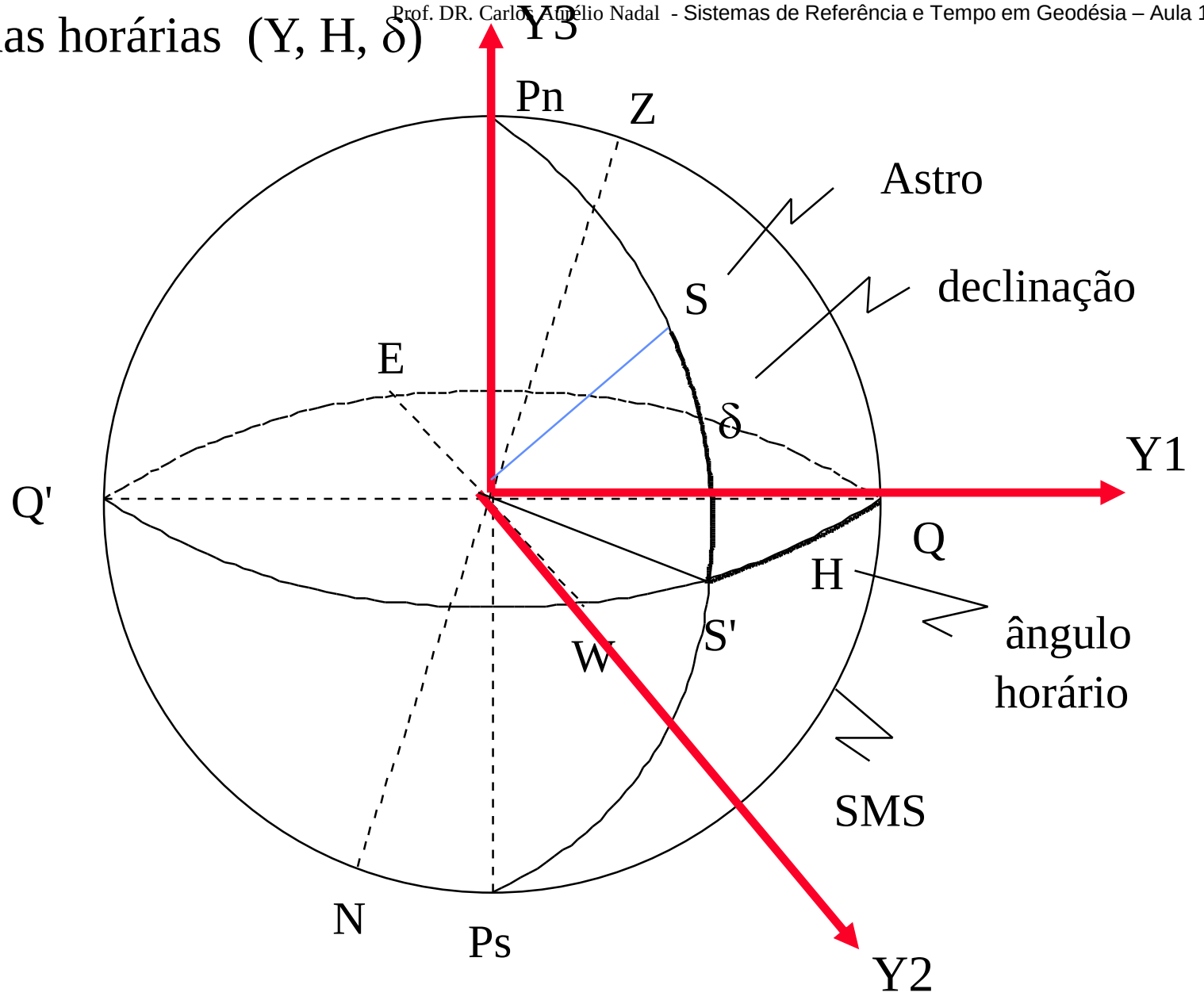
d) no sistema de coordenadas eclípticas

$$e_1 = \cos \beta \cos \lambda$$

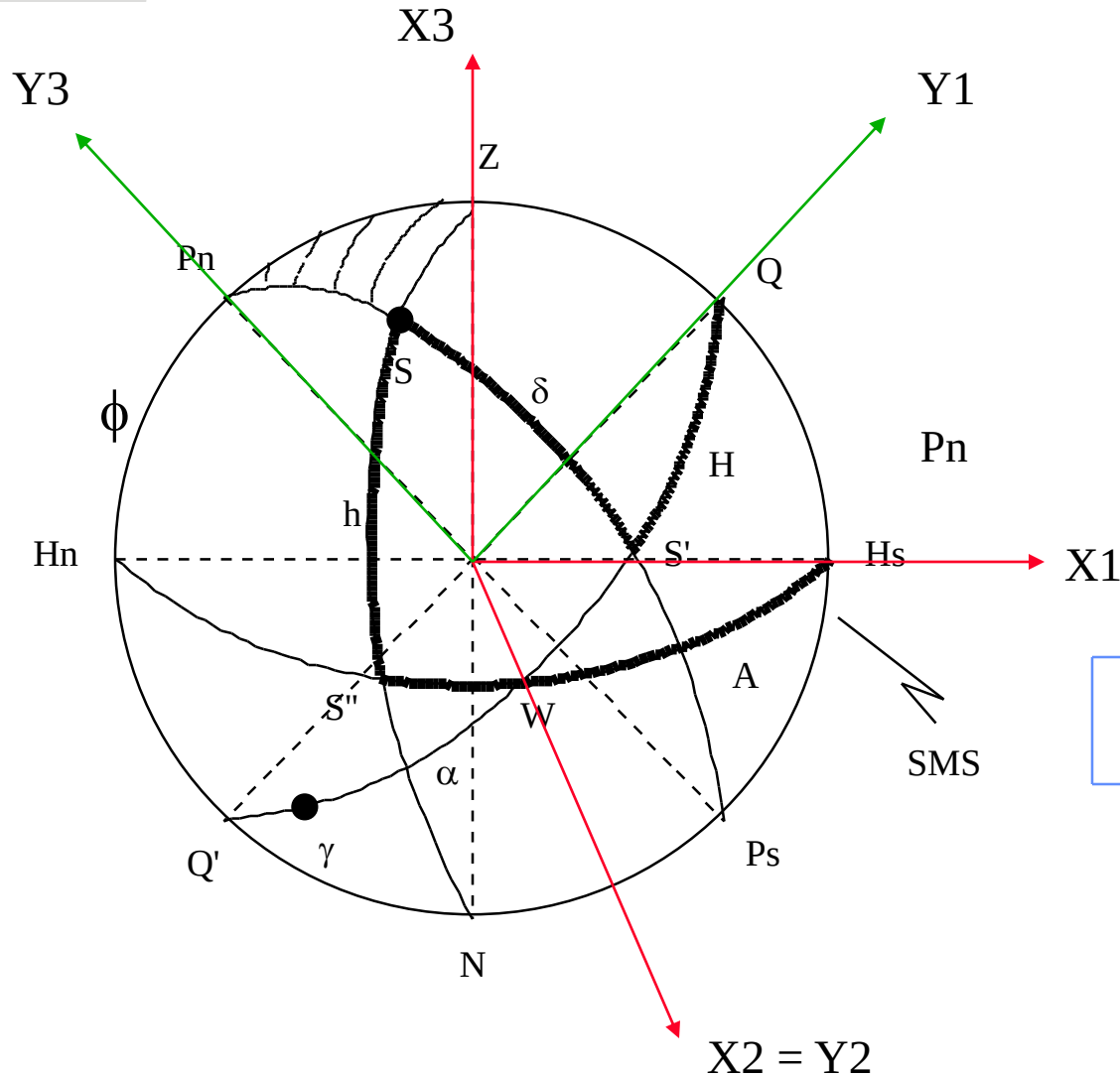
$$e_2 = \cos \beta \sin \lambda$$

$$e_3 = \sin \beta$$

Coordenadas horárias (Y, H, δ)



TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS HORIZONTAIS EM HORÁRIAS



$$Y = R2[-(90^{\circ}-\Phi)] X$$



TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

HORIZONTALAIS EM HORÁRIAS

$$Y = R2 [-(90^{\circ} - \Phi)] X$$

a) Vetor posição geocêntrico da estrela

$$\left| \begin{array}{l} X1 = \cos h \cos A \\ X2 = \cos h \sin A \\ X3 = \sinh \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} Y1 = \cos \delta \cos H \\ Y2 = \cos \delta \sin H \\ Y3 = \sin \delta \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} H = Y2/Y1 \\ \sin \delta = Y3 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} A = X2/X1 \\ \sin h = X3 \end{array} \right|$$

$$R2 [-(90^{\circ} - \Phi)] = \left| \begin{array}{ccc} \sin \phi & 0 & \cos \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \phi & 0 & \sin \phi \end{array} \right|$$

HORÁRIAS EM HORIZONTALAIS

$$X = R2 [(90^{\circ} - \Phi)] Y$$

Discussão sobre o quadrante das soluções

. Quanto ao azimute do astro

$$A = \arctan (X_2/X_1)$$

Se $X_2/X_1 < 0$ então A é do 2ºQ ou 4ºQ

Se $X_2/X_1 > 0$ então A é do 1ºQ ou 3ºQ

Escolha: azimute e ângulo horário são de mesma espécie

A e H são simultaneamente menores que 180°

ou,

A e H são simultaneamente maiores que 180°

Discussão sobre o quadrante das soluções

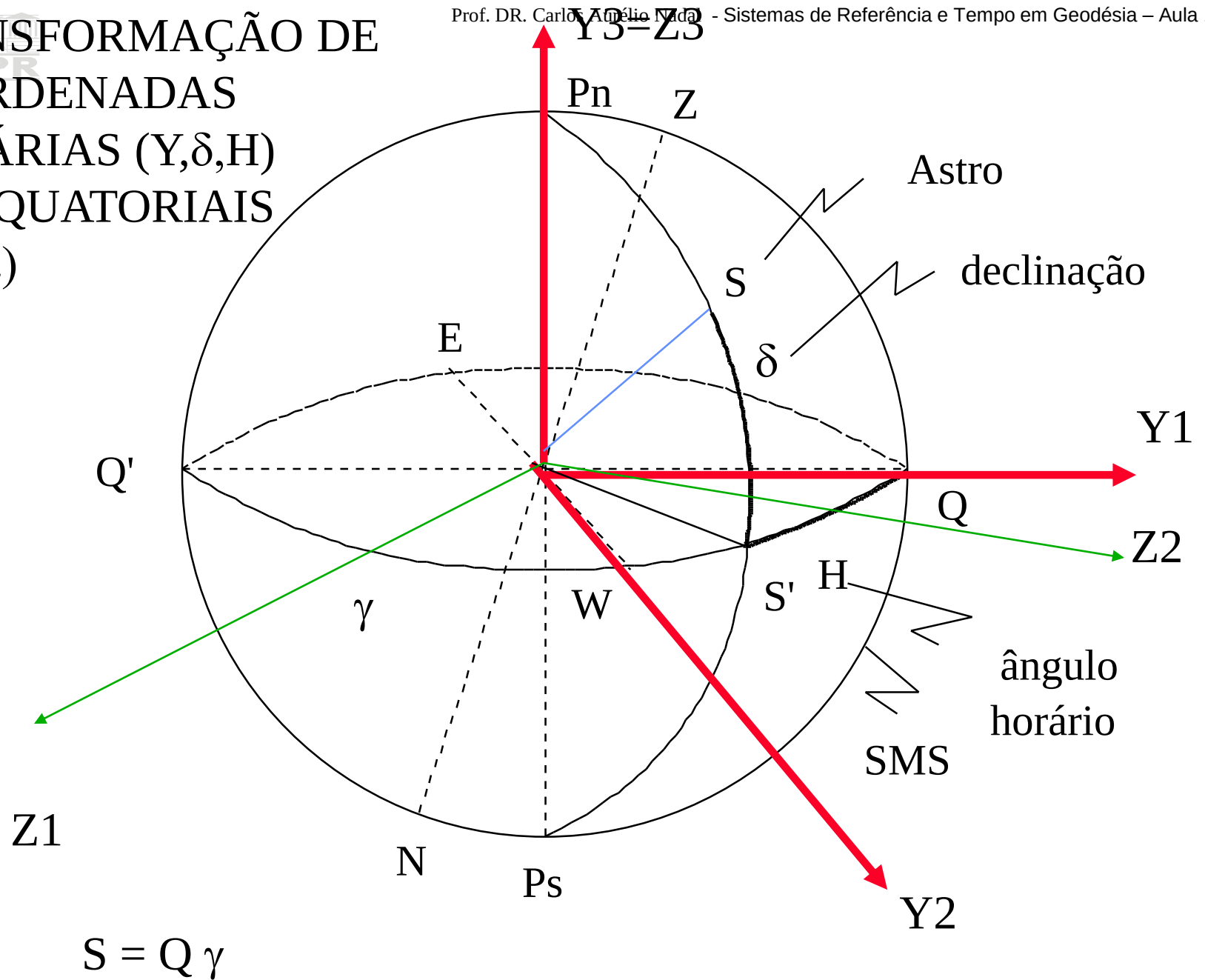
. Quanto a altura do astro

$$h = \arcsin(X_3)$$

Se $X_3 < 0$ então h é do 4ºQ (astro invisível)

Se $X_3 > 0$ então h é do 1ºQ (astro visível)

Similarmente discute-se o quadrante das Coordenadas Horárias H e δ





TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

HORÁRIAS EM EQUATORIAIS

$$Z = R3 [(180^\circ - S)R1] Y$$

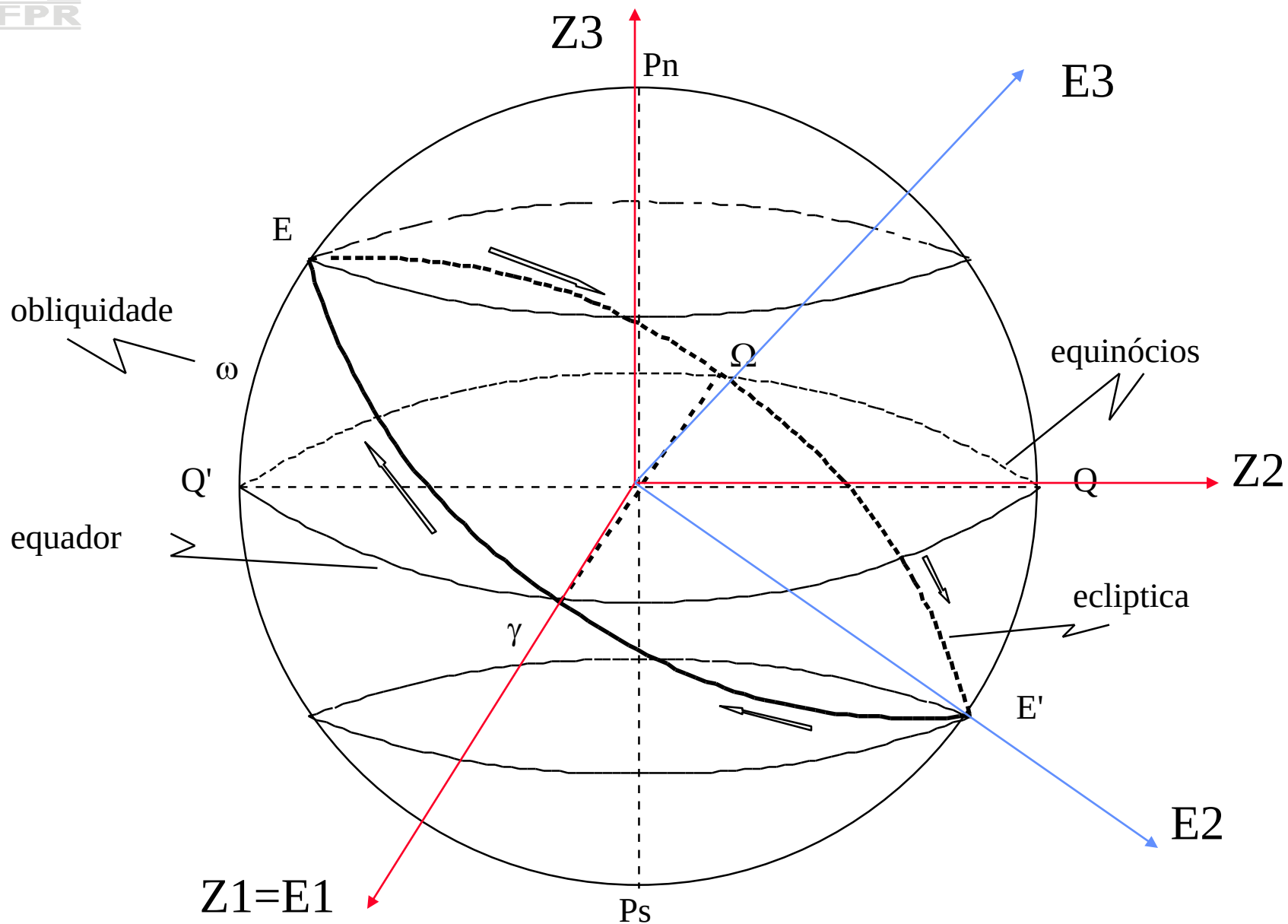
a) Vetor posição geocêntrico da estrela

$$\left| \begin{array}{l} Z1 = \cos \delta \cos \alpha \\ Z2 = \cos \delta \sin \alpha \\ Z3 = \sin \delta \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} Y1 = \cos \delta \cos H \\ Y2 = \cos \delta \sin H \\ Y3 = \sin \delta \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} H = Y2/Y1 \\ \sin \delta = Y3 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \alpha = Z2/Z1 \\ \sin \delta = Z3 \end{array} \right|$$

$$R3 [180^\circ - S] = \left| \begin{array}{ccc} -\cos S & \sin S & 0 \\ -\sin S & -\cos S & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \quad R1 (180^\circ) = \left| \begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

EQUATORIAIS EM HORÁRIAS

$$Y = R3 [-S] R2] Z$$



CAN



TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

EQUATORIAIS EM ECLIPTICAS

$$E = R1(\omega) Z$$

a) Vetor posição geocêntrico da estrela

$$\left| \begin{array}{l} Z1 = \cos \delta \cos \alpha \\ Z2 = \cos \delta \sin \alpha \\ Z3 = \sin \delta \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} E1 = \cos \beta \cos \lambda \\ E2 = \cos \beta \sin \lambda \\ E3 = \sin \beta \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \lambda = E2/E1 \\ \sin \beta = E3 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \alpha = Z2/Z1 \\ \sin \delta = Z3 \end{array} \right|$$

$$R1 [\omega] = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & \sin \omega \\ 0 & -\sin \omega & \cos \omega \end{array} \right|$$

ECLIPTICAS EM EQUATORIAIS

$$Z = R1 [-\omega] E$$



TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

HORIZONTALIS EM ECLIPTICAS

$$E = R1[\omega] R3[180^{\circ}-S]R1 R2[-(90^{\circ}-\Phi)] X$$

a) Vetor posição geocêntrico da estrela

$X1 = \cos h \cos A$	$E1 = \cos \beta \cos \lambda$	$\operatorname{tg} \lambda = E2/E1$	$\operatorname{tg} A = X2/X1$
$X2 = \cos h \sin A$	$E2 = \cos \beta \sin \lambda$	$\sin B = E3$	$\sin h = X3$
$X3 = \sin h$	$E3 = \sin \beta$		

ECLIPTICAS EM HORIZONTALIS

$$X = R2[(90^{\circ}-\Phi)] R3[-S]R2 R1 [-\omega] E$$