

7. Aplicação da Resistência dos Materiais em Geodésia

Uma estrutura geodésica constitui-se de uma rede de pontos materializados no terreno, cujas posições foram obtidas por meio de observações e cálculos rigorosos.

Em algumas aplicações é importante o estabelecimento de um controle de possíveis movimentos nesta estrutura, um exemplo, são os deslocamentos das placas tectônicas. Assumindo a estrutura geodésica como um corpo, então qualquer mudança na forma, dimensão e posição trata-se de uma deformação.

Uma das formas de identificar as deformações de uma estrutura geodésica é através da aplicação dos conceitos da Resistência dos Materiais nos deslocamentos detectados por levantamentos em épocas diferentes. O resultado desta técnica vem através de parâmetros que identificam tração e compressão (e outros) sofridos pela estrutura nos pontos analisados.

7.1.1 Parâmetros de Deformação

A determinação das deformações de um corpo (ou de uma estrutura) podem ser descritas em termos de tração, compressão e cisalhamento, isto é, medem-se as alterações sofridas pelos comprimentos de segmentos de retas e pelos ângulos entre eles (Silva, 1986).

A deformação de um corpo, por tração ou compressão sob a ação de cargas multiaxiais, é definida como a razão entre a variação do seu comprimento pelo comprimento original. Deste modo, as deformações específicas de um prisma (figura 7.1), ao longo de cada um de seus eixos coordenados sob a ação de uma força de tração P no sentido do eixo y são:

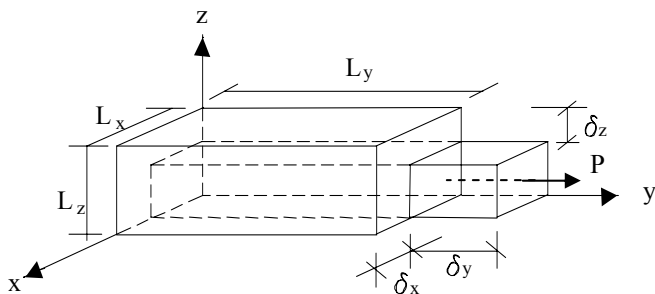


Figura 7.1 Tração e Compressão

$$\epsilon_x = \frac{\delta_x}{L_x};$$

$$\epsilon_y = \frac{\delta_y}{L_y};$$

$$\epsilon_z = \frac{\delta_z}{L_z}.$$

(7.1)

O mesmo acontece na outra extremidade do prisma.

A figura 7.2 mostra a deformação por cisalhamento em relação ao eixo X e é dado por:

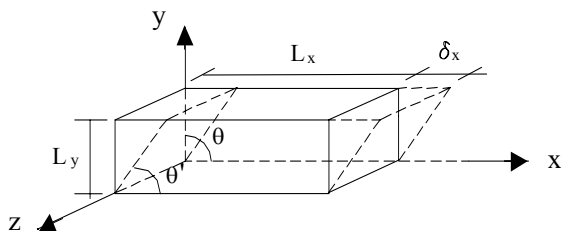


Figura 7.2 Cisalhamento

$$\gamma_{xy} = \tan(\theta - \theta') \quad (7.2)$$

ou

$$\gamma_{xy} \cong \theta - \theta' \quad (7.3)$$

e de modo análogo, obtém-se γ_{xz} e γ_{yz} .

Ressalta-se que os parâmetros ε_X , ε_Y , ε_Z , γ_{XY} , γ_{XZ} , γ_{YZ} mostram como se comportam os segmentos L_X , L_Y , L_Z na vizinhança próxima do ponto analisado.

7.1.2 Parâmetros Básicos de Deformação

A geometria de deformação descrita na seção anterior é feita através dos parâmetros apresentados pelas equações 7.1, 7.2 ou 7.3 as quais determinam as alterações sofridas por três segmentos infinitesimais de reta (mutuamente perpendiculares antes da deformação), que se interceptam no ponto analisado. Deste modo, os parâmetros que descrevem esta geometria, são definidos a partir de três funções básicas $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ e $w(x,y,z)$ as quais são contínuas e analíticas, e representam os deslocamentos sofridos pelos segmentos dx, dy, dz .

A figura 7.3 apresenta um corpo num sistema bidimensional, mostrando os deslocamentos representados pelas funções $u(x,y)$ e $v(x,y)$ como também distorções angulares representadas pelos ângulos α e β . Os parâmetros de deformação podem ser expressos como derivadas parciais de primeira ordem das funções deslocamento $u(x,y)$ e $v(x,y)$.

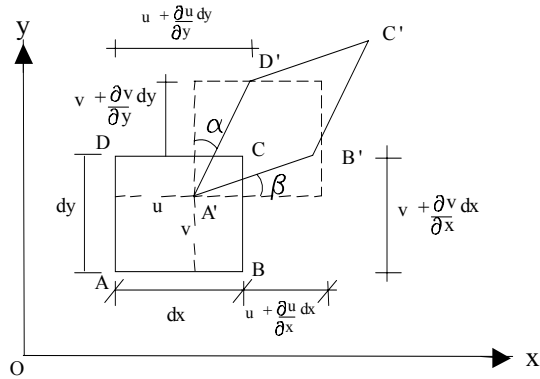


Figura 7.3 Deslocamentos e distorções angulares

A deformação específica na direção do eixo OX é dado por (Kuang,1996):

$$\epsilon_x = \frac{\delta_x}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (7.4)$$

e generalizando para o caso tridimensional, tem-se que:

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (7.5)$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (7.6)$$

A distorção angular é determinada em função dos ângulos α e β e para pequenas deformações, vem que:

$$\alpha = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (7.7)$$

$$\beta = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (7.8)$$

e a deformação de cisalhamento no plano XY é dada por:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (7.9)$$

e por analogia em relação aos planos XZ e YZ, vem:

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (7.10)$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (7.11)$$

Pode-se agrupar os elementos básicos de deformação em forma da matriz E, chamada de Tensor de Deformação (de segunda ordem). Então tem-se (Kuang, 1996; Santos, 1999):

$$E = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (7.12)$$

e esta matriz pode ser decomposta analiticamente utilizando-se de uma propriedade dos tensores de segunda ordem, isto é, todo tensor de segunda ordem pode ser decomposto na soma de outros dois tensores, sendo um simétrico e outro anti-simétrico (Vanicek and Krakiwisky, 1986). Então, para um caso bi-dimensional:

$$E = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 0 \end{bmatrix}, \quad (7.13)$$

ou de um modo mais compacto,

$$E = \varepsilon + \omega \quad (7.14)$$

onde a matriz ε é chamada de Tensor de Deformação Simétrica e representa a deformação enquanto que ω é denominada de Tensor de Deformação Anti- Simétrica representando o ângulo de cisalhamento.

7.1.3 Parâmetros de Deformação em Estruturas Geodésicas

As seções anteriores descreveram como é possível determinar a deformação de um corpo, quando sujeito a um carregamento através de seus parâmetros de deformação. Estes conceitos também podem ser aplicados para analisar deslocamentos em estruturas geodésicas provocadas ou por movimentos, por exemplo, de placas tectônicas ou detectados quando compara-se dois conjuntos de coordenadas oriundos de ajustamentos em épocas distintas.

Para a aplicação dos parâmetros de deformação em estruturas geodésicas, duas hipóteses serão adotadas (Silva, 1986):

- a- Admite-se que o processo de deformação subtendido pelas estruturas geodésicas, seja regido segundo as teorias de deformação *homogênea e infinitesimal*. Considera-se a vizinhança de um vértice de uma estrutura todos os vértices a ele conectado, figura 7.4;
- b- A ordem de grandeza dos deslocamentos relativos de dois vértices vizinhos é pequena em comparação com a distância que os separa.

$$a_2 = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (7.18b)$$

$$b_1 = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (7.18c)$$

$$b_2 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (7.18d)$$

e a_0 , b_0 são funções das coordenadas do ponto analisado, ou seja:

$$a_0 = u(x_0, y_0), \quad (7.19a)$$

$$b_0 = v(x_0, y_0). \quad (7.19b)$$

Para a determinação dos parâmetros de deformação, considera-se conhecido o valor da função deslocamento em todos os vértices da estrutura. A obtenção desses valores pode ser feita, por exemplo, comparando-se observações coletadas em duas épocas diferentes, ou seja, para os ajustamentos (1) e (2), tem-se que (Santos, 1999):

$$u = u(x, y) = x^2 - x^1, \quad (7.20a)$$

$$v = v(x, y) = y^2 - y^1. \quad (7.20b)$$

O cálculo dos parâmetros de deformação (a_1 , b_1 , a_2 , b_2) pode ser obtido através das equações 7.17a e 7.17b, para a vizinhança de cada vértice a ser analisado. Deste modo, considerando-se os n vértices vizinhos ao ponto P , de coordenadas (x_0, y_0) , as equações 7.17a e 7.17b tornam-se (Silva, 1986; Santos, 1999):

$$u(x_1 - y_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) + a_2(y_1 - y_0),$$

$$v(x_1 - y_1) = b_0 + b_1(x_1 - x_0) + b_2(y_1 - y_0),$$

$$\begin{aligned}
 u(x_n - y_n) &= a_0 + a_1 (x_n - x_0) + a_2 (y_n - y_0), \\
 v(x_n - y_n) &= b_0 + b_1 (x_n - x_0) + b_2 (y_n - y_0),
 \end{aligned}
 \tag{7.21}$$

ou de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} u(x_1, y_1) \\ v(x_1, y_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u(x_n, y_n) \\ v(x_n, y_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_1 - x_0) & (y_1 - y_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (x_1 - x_0) & (y_1 - y_0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (x_n - x_0) & (y_n - y_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (x_n - x_0) & (y_n - y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} \tag{7.22}$$

ou ainda:

$$d = Ae + c, \tag{7.23}$$

onde $d_{(2nx1)}$, $A_{(2nx4)}$, $e_{(4x1)}$ e $c_{(2nx1)}$. A solução da equação 7.23 é dada por:

$$e = -(A^T A)^{-1} A^T L, \tag{7.24}$$

com $L = c - d$,

e a solução da equação 7.24 conduzirá aos parâmetros de deformação das equações 7.18.

A interpretação do significado dos parâmetros de deformação pode ser feita através da respectiva representação visual. A técnica para representação da deformação simétrica é similar à elipse de erros formada a partir do resultado de um ajustamento por mínimos quadrados (Gemael, 1994). Para a rotação diferencial, se faz uso de arcos de circunferência. Deste modo a elipse de deformação é definida a partir dos seus eixos principais de deformação que têm a direção dos autovetores do tensor de deformação simétrica. Os valores de seus semi-

eixos maior e menor são os autovalores do referido tensor. Então tem-se que (Silva, 1986):

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + m, \quad (7.25)$$

$$\lambda_{\min} = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - m, \quad (7.26)$$

$$\text{sendo } m = \left[\frac{1}{4}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \varepsilon_{xy}^2 \right]^{1/2}.$$

A orientação da elipse de deformação, que orienta o seu eixo maior, é dada por:

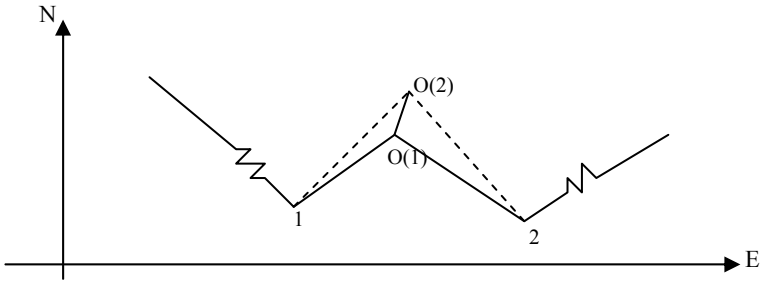
$$\tan \theta = - \left[\frac{1}{\varepsilon_{xy}} (\varepsilon_x - \lambda_{\max}) \right]. \quad (7.27)$$

O tensor de deformação admite autovalores positivos e negativos representando tração e compressão, respectivamente.

Exemplo.

Após ajustamentos distintos de duas poligonais, realizadas em épocas diferentes, (1) e (2), detectou-se um deslocamento da estação O, situada sobre uma ponte. Calcular os valores máximo e mínimo de deformação, bem como a orientação da elipse de deformação. Dados as coordenadas UTM dos pontos 1, 2, O(1) e O(2):

Ponto	E (m)	N (m)
O(1)	673.950,000	7.187.550,000
O(2)	673.950,090	7.187.550,080
1	668.960,000	7.186.770,000
2	679.940,000	7.185.940,000



Dados: $E_{P\text{-ponto}}^{S\text{-época}}$

$$\begin{aligned} E_0^1 &= 673950,000\text{m}; & E_1 &= 668960,000\text{m}; \\ N_0^1 &= 7187550,000\text{m}; & N_1 &= 7186770,000\text{m}; \\ E_0^2 &= 673950,090\text{m}; & E_2 &= 679940,000\text{m}; \\ N_0^2 &= 7187550,080\text{m}; & N_2 &= 7185940,000\text{m}. \end{aligned}$$

Da equação 7.23 tem-se que:

$$A = \begin{bmatrix} (E_1 - E_0^1) & (N_1 - N_0^1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (E_1 - E_0^1) & (N_1 - N_0^1) \\ (E_2 - E_0^1) & (N_2 - N_0^1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (E_2 - E_0^1) & (N_2 - N_0^1) \end{bmatrix},$$

$$e = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \text{ (a ser determinado)}$$

$$c = \begin{bmatrix} E_o^2 - E_o^1 \\ N_o^2 - N_o^1 \\ E_o^2 - E_o^1 \\ N_o^2 - N_o^1 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} E_1^2 - E_1^1 \\ N_1^2 - N_1^1 \\ E_2^2 - E_2^1 \\ N_2^2 - N_2^1 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ é nulo pois os}$$

pontos 1 e 2 são fixos.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_d = \underbrace{\begin{bmatrix} -4990 & -780 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4990 & -780 \\ 5990 & -1610 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5990 & -1610 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}_e + \underbrace{\begin{bmatrix} 0,09 \\ 0,08 \\ 0,09 \\ 0,08 \end{bmatrix}}_c,$$

e da equação 7.24,

$$e = -(A^T A)^{-1} A^T L,$$

$$e = \begin{bmatrix} 0,059 \\ 0,777 \\ 0,052 \\ 0,690 \end{bmatrix} \times 10^{-4} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Calculo da ellipse de deformação.

Das equações 7.13, 7.25, 7.26 e 7.27 tem-se:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \quad \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

$$\varepsilon_x = 0,059 \times 10^{-4} \text{ strain},$$

$$\varepsilon_{xy} = 0,415 \times 10^{-4} \text{ strain},$$

$$\varepsilon_y = 0,690 \times 10^{-4} \text{ strain},$$

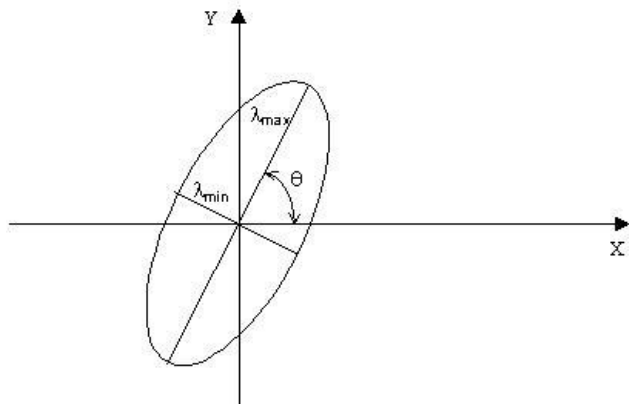
$$m = 5,21 \times 10^{-5} \text{ strain},$$

$$\lambda_{\max} = 8,966 \times 10^{-5} \text{ strain, (tração)}$$

$$\lambda_{\min} = 8,966 \times 10^{-5} \text{ strain, (compressão)}$$

Orientação da elipse dos erros.

$$\tan \theta = - \left[\frac{1}{\varepsilon_{xy}} (\varepsilon_x - \lambda_{\max}) \right] \Rightarrow \theta = 63,6^\circ$$



Os parâmetros de deformação mostram, em cada vértice da Estrutura Geodésica, variação (média de escala) das distâncias entre o ponto analisado e a sua vizinhança. Estes parâmetros são adimensionais para os quais adota-se uma unidade específica, o strain. Para fins de interpretação dos resultados, usam-se os seus sub-múltiplos, isto é, o μstrain . Como os parâmetros de deformação representam variações relativas de uma grandeza linear, o μstrain vai afetar a sexta casa decimal dessas variações, ou ainda, em ppm (1 μstrain = 1ppm).

7.2. Aplicação do Círculo de Mohr na Análise de Erros

Análise de erro é uma parte fundamental em levantamentos geodésicos, pois nenhum deles é completo se

não houver uma verificação matemática sobre a ocorrência de algum tipo de erro. A análise de erro, geralmente envolve um ajustamento dos dados coletados para determinar o valor mais provável (VMP) das posições dos pontos levantados. A precisão do posicionamento pode ser descrita pela magnitude de regiões de confiança em torno do VMP, e o ajustamento oferece informações para determinar as dimensões de uma elipse de erros, centrada no VMP, associada a um nível de probabilidade ou confiança, dentro do qual o ponto se situa. Geralmente, aplica-se o método dos mínimos quadrados para o ajustamento (Haug, 1984).

Nesta seção, a técnica do círculo de Mohr (TCM) é utilizada como uma técnica alternativa para análise de erro. O desenvolvimento de fórmulas básicas é muito simples com esta técnica, e também, é possível obter informação sobre a direção da elipse de erros. O círculo de Mohr é apresentado graficamente usando simplesmente um compasso e uma régua.

Através do processo de ajustamento por mínimos quadrados, é possível determinar o VMP, por meio da solução de um sistema de equações normais, como correções a serem aplicadas a valores iniciais às coordenadas das posições (são as observações). Aplicando o método paramétrico (Gemaël, 1994), a solução para o vetor X é dada por:

$$X = -(A^T P A)^{-1} A^T P L, \quad (7.28)$$

onde A é a matriz das derivadas parciais, P é a matriz dos pesos e L o vetor das observações.

A determinação do VMP deve vir acompanhado de um indicador de precisão, no caso $(A^T P A)^{-1}$ e σ_0^2 (variância a priori), que fornecem informações sobre a precisão do posicionamento no levantamento.

Os valores da variância-covariância para a precisão no posicionamento pode ser obtido (para um ponto), para um caso tridimensional, por:

$$\Sigma_{vc} = \sigma_0^2 (A^T P A)^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^2 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ & \sigma_{yy}^2 & \sigma_{yz} \\ & & \sigma_{zz}^2 \end{bmatrix}. \quad (7.29)$$

A matriz Σ_{vc} , equação 7.29, é chamada de variância-covariância, onde as variâncias ocupam a diagonal principal e as covariâncias os elementos não diagonal.

Com a matriz variância-covariância, pode-se determinar o limite de probabilidade, sendo a elipse a figura ideal para este propósito. A área dentro da elipse é descrita como uma região de confiança, isto é, existe uma probabilidade que a posição esteja dentro da elipse. A figura 7.5 mostra esta elipse que define a região de confiança, onde os erros máximo e mínimo obtidos do ajustamento, encontram-se sobre os semi- eixos maior e menor, respectivamente, e a orientação é dada pelo ângulo ϕ .

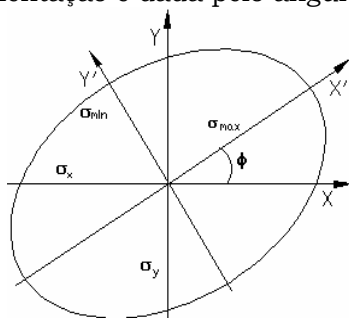


Figura 7.5 Elipse dos Erros

A TCM para a análise de erro (o cálculo da precisão no posicionamento) é fundamentado na variância e covariância. Estes valores são obtidos, após o ajustamento por mínimos quadrados, por meio da equação 7.29. Desenha-se um sistema de eixos: o horizontal, onde a abscissa representa a variância, e o vertical, com a covariância representada pela ordenada, figura 7.6. Considerando dois pontos, P e Q, diametralmente opostos de modo que as coordenadas de P sejam, σ_x^2, σ_{xy} e as

coordenadas de $Q, \sigma_y^2, \sigma_{xy}$. Admitindo que, $\sigma_x^2 > \sigma_y^2$ e $\sigma_{xy} > 0$, o segmento de reta que une os pontos P e Q definem o diâmetro do círculo de Mohr para a estação. As variâncias principais, máxima e mínima, são encontradas graficamente, construindo-se um círculo contendo os pontos P e Q , com centro C . A linha CP representa a direção P , e a linha CQ a direção Q . O ângulo 2ϕ é PCP' e o ϕ é dado por PBP' .

covariâncias, σ_{xy}

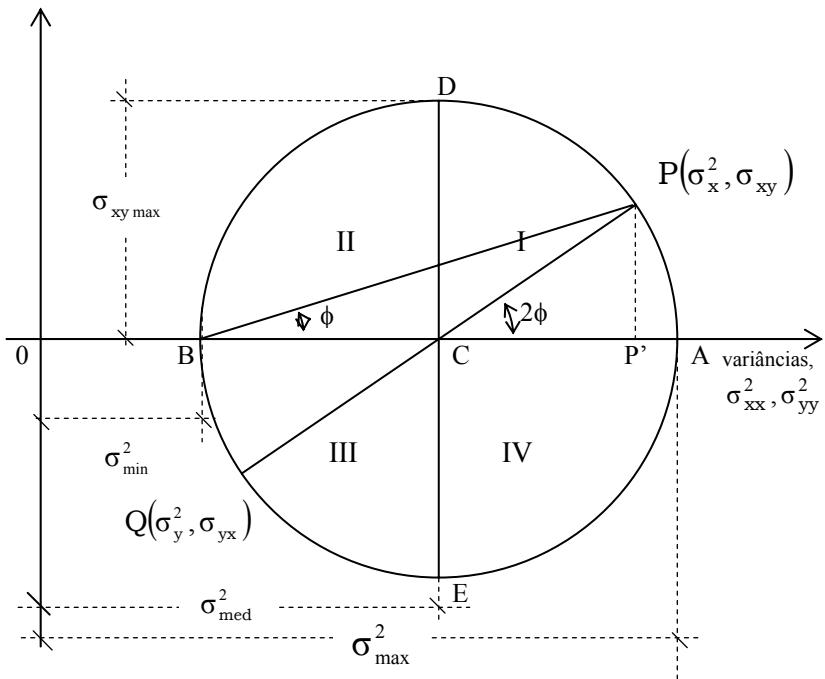


Figura 7.6 Círculo de Mohr

Então, pelo círculo de Mohr, utilizando uma escala conveniente, uma régua e um transferidor obtém-se:

- Variância máxima (régua)

$$\sigma_{\max}^2 = AO; \quad (7.30)$$

- Variância mínima (régua)

$$\sigma_{\min}^2 = OB; \quad (7.31)$$

- Relação angular (transferidor)

$$2\Phi = PCP', \quad (7.32)$$

e os resultados das equações 7.30 , 7.31 e 7.32 são idênticos aos fornecidos pelas equações 7.33 ,7.34 e 7.35 usadas para a construção da elipse de erros encontras na literatura geodésica.

$$\sigma_{\max}^2 = \frac{1}{2}(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + \sqrt{(\sigma_X^2 - \sigma_Y^2)^2 + 4\sigma_{XY}^2}), \quad (7.33)$$

$$\sigma_{\min}^2 = \frac{1}{2}(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - \sqrt{(\sigma_X^2 - \sigma_Y^2)^2 + 4\sigma_{XY}^2}), \quad (7.34)$$

$$\tan 2\phi = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}. \quad (7.35)$$

A tabela 7.1 apresenta a definição do quadrante da direção do ponto P (Santos, 1984). Deste modo, o círculo de Mohr é dividido em quadrantes, figura 7.6, indicados pelos números romanos e os sinais dos valores σ_{xy} e $(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)$ que definem a direção P.

Tabela 7.1 Definição do quadrante da direção para P.

Valor	Sinal	Quadrante para P
σ_{xy} $(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)$	+	I
σ_{xy} $(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)$	+	
σ_{xy} $(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)$	+	II
σ_{xy} $(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)$	-	
σ_{xy} $(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)$	-	III
σ_{xy} $(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)$	-	
σ_{xy} $(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)$	-	IV
σ_{xy} $(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)$	+	

Exemplo

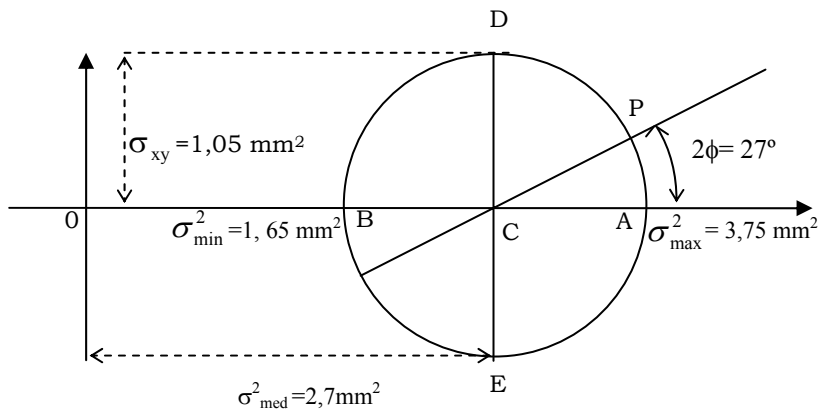
Um levantamento foi efetuado, no qual dois pontos A e B foram ocupados, objetivando a determinação de um ponto C. As observações coletadas (ângulos e distâncias) foram ajustadas, e o valor mais provável do ponto C foi obtido, associado à matriz variância covariância:

$$\Sigma_{vc} = \begin{bmatrix} 3,510 & 0,500 \\ 0,500 & 1,800 \end{bmatrix} \text{mm}^2.$$

- a) Calcular graficamente o valor das variâncias e covariâncias máximas e mínimas, bem como o ângulo de orientação da direção P; b) Desenhe a elipse dos erros.

Quadrante da direção P $\Rightarrow \sigma_{xy} > 0$; $\sigma_x^2 - \sigma_y^2 > 0 \Rightarrow 1^\circ$ quadrante

Escala : 1cm = 0,5 mm²

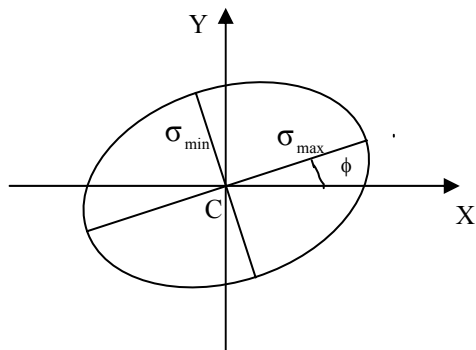


b) Elipse dos erros.

$$\sigma_{\max} = 1,94 \text{ mm} \Rightarrow a$$

$$\sigma_{\min} = 1,28 \text{ mm} \Rightarrow b$$

$$\phi = 13,5^\circ$$



Exercícios Propostos

1) Um levantamento foi efetuado, no qual dois pontos A e B foram ocupados, objetivando a determinação de um ponto C. As observações coletadas (ângulos e distâncias) foram ajustadas e o VMP do ponto C foi obtido, associado a matriz variância covariância. Calcular graficamente o valor das variâncias e covariâncias máximas e mínimas, bem como o ângulo de orientação da direção P, para os seguintes casos:

$$\text{a) } \Sigma_{vc} = \begin{bmatrix} 5,31 & 0,50 \\ 0,50 & 6,29 \end{bmatrix} \text{mm}^2.$$

$$\text{b) } \Sigma_{vc} = \begin{bmatrix} 4,650 & 0,200 \\ 0,200 & 5,410 \end{bmatrix} \text{mm}^2.$$

$$\text{c) } \Sigma_{vc} = \begin{bmatrix} 3,510 & 0,500 \\ 0,500 & 1,800 \end{bmatrix} \text{mm}^2.$$

$$\text{d) } \Sigma_{vc} = \begin{bmatrix} 3,58 & 1,61 \\ 1,61 & 2,16 \end{bmatrix} \text{mm}^2.$$

$$\text{e) } \Sigma_{vc} = \begin{bmatrix} 1,943 & -0,604 \\ -0,604 & 0,494 \end{bmatrix} \text{mm}^2.$$

$$\text{f) } \Sigma_{vc} = \begin{bmatrix} 4,018 & 2,296 \\ 2,296 & 1,722 \end{bmatrix} \text{mm}^2.$$

Respostas dos Exercícios Propostos

- 1) a- $6,5 \text{ mm}^2$; $5,1 \text{ mm}^2$; $0,7 \text{ mm}^2$; -23° .
b- $5,45 \text{ mm}^2$; $4,60 \text{ mm}^2$; $0,43 \text{ mm}^2$; -28° .
c- $3,75 \text{ mm}^2$; $1,65 \text{ mm}^2$; $1,0 \text{ mm}^2$; $13,5^\circ$.
d- $4,7 \text{ mm}^2$; $1,2 \text{ mm}^2$; $1,8 \text{ mm}^2$; 33° .
e- $2,2 \text{ mm}^2$; $0,3 \text{ mm}^2$; $1,0 \text{ mm}^2$; -19° .
f- $5,4 \text{ mm}^2$; $0,3 \text{ mm}^2$; $2,8 \text{ mm}^2$; 32° .