

1. Introdução à Resistência dos Materiais

A Mecânica dos Materiais ou então, Resistência dos Materiais, é um capítulo da Mecânica dos Corpos Sólidos, que trata do equilíbrio destes considerando os efeitos internos provocados por forças externas (Popov 1976). Possui inúmeras aplicações na Engenharia, tradicionalmente ligadas à solução de problemas de dimensionamento, e verificação de segurança de peças e estruturas.

O comportamento de corpos sujeitos a forças externas depende das leis fundamentais da Mecânica Newtoniana que governa o equilíbrio das forças, como também das características físicas dos materiais que compõem o corpo. Informações destas características são determinadas em laboratórios, onde os materiais são testados sujeitos a forças conhecidas e controladas, e o comportamento resultante observado verifica a existência de fraturas, deformações, etc.

O estudo que aqui é tratado lida com a pesquisa matemática ao invés de experimentos em laboratórios.

Na conceituação básica da Resistência dos Materiais, os corpos ou peças, sob a ação de forças externas estão sujeitos a deformações de diversas naturezas e a mesma conceituação básica pode ser aplicada às estruturas de maior proporção, como é feito em estudos dentro das áreas de Geodésia e Geodinâmica. Como exemplo de deformações, citam-se aquelas provocadas pelo enchimento de barreiras, aquelas provocadas pelo movimento de falhas geológicas, figura 1.1 (Santos, 1999).

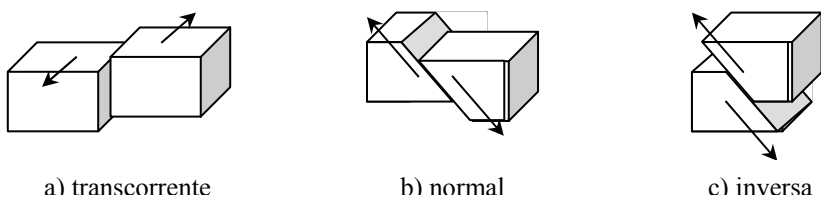


Figura 1.1 Falhas geológicas

As deformações podem ser classificadas como sendo de: escala local, ocorrem em estruturas feitas pelo homem, ou por ele modificadas, como área de extração de água, petróleo, ou minérios; escala regional ou continental são aquelas provocadas pelo movimento entre placas tectônicas e as de escala global oriundas do movimento do pólo e a variação da rotação da Terra.

Do ponto de vista geodésico, as mesmas técnicas utilizadas para a análise de deformações podem ser empregadas na análise da robustez de redes geodésicas com o objetivo de controle de deformações incluindo aqui a otimização de redes geodésicas, envolvendo a chamada pré-análise (verificação de erros) e a integração de observações não homogêneas.

Uma estrutura geodésica constitui-se de um conjunto de vértices, monumentados no terreno, conectados entre si por meio de observações. Os conceitos da Resistência dos Materiais podem ser aplicados ao estudo de Estabilidade de uma Estrutura Geodésica com o propósito de controle de deformações, isto é, os deslocamentos dos vértices podem ser diretamente correlacionados a deslocamentos do corpo sob investigação. Então, busca-se saber o quanto os erros sistemáticos que afetam as observações, estão influenciando a forma da rede geodésica (Santos, 1999)

1.1 Conceitos Preliminares

a- Projeto de elementos resistentes

Projetar uma construção significa prever a associação de diferentes componentes de modo a atingir dois objetivos:

- de ordem funcional para que se tenha o fim desejado;
- de ordem estrutural de modo a ter um conjunto estável.

b- Estrutura

Conjunto de elementos resistentes de uma construção ou máquina que é capaz de receber ou transmitir forças.

Elementos resistentes: vigas, pilares, lajes, blocos, sapatas, tirantes, eixos (mecânica), figura 1.2.

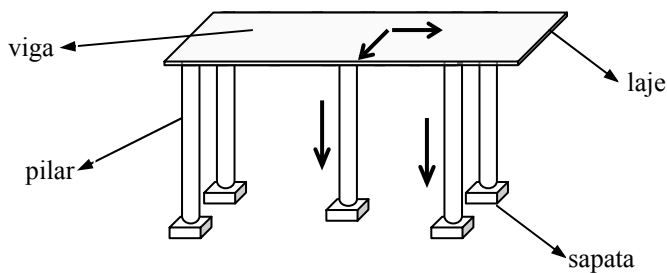


Figura 1.2 Elementos resistentes

c - Barras

São peças que tem seção transversal pequena em relação ao comprimento, por exemplo, viga, figura 1.3.

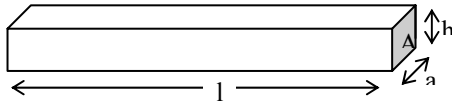


Figura 1.3 Viga

onde l é o comprimento da barra, a a sua largura, h a altura e A a seção transversal.

d - Chapas e placas

São peças que tem espessura muito pequena em relação a área do seu plano médio.

Placas: quando o carregamento é perpendicular ao plano médio, figura 1.4.a;

Chapas : quando o carregamento está contido no plano médio, figura 1.4.b.

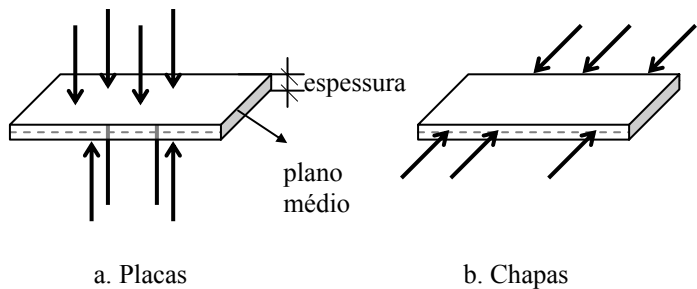


Figura 1.4 Placas e Chapas

e – Cascas

São peças cuja superfície média é curva e possuem pequena espessura em relação a área do plano médio figura 1.5.

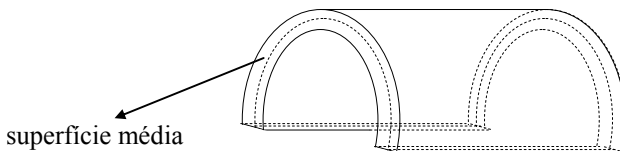


Figura 1.5 Casca

f – Blocos

São peças que possuem as três dimensões aproximadamente iguais, ver figura 1.6.

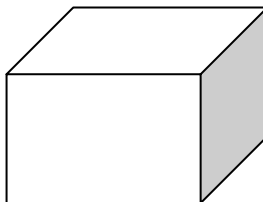


Figura 1.6 Bloco

1.2 Conceito de Resistência dos Materiais

Na Mecânica (Racional) os corpos são considerados rígidos o que na realidade não acontece. No caso em que se levar em consideração as transformações sofridas pelo corpo, o problema escapa do domínio da Mecânica (Racional), a menos que se possa ter uma idéia precisa do estado final da deformação, estado estático, quando as equações de equilíbrio poderão fornecer meios para solução do problema (Lacerda,1964). Pode-se afirmar, que mesmo havendo deformação do corpo, a Mecânica com as equações de equilíbrio, poderá resolver parcialmente problema, como por exemplo, a determinação das reações dos apoios de uma viga apoiada nas duas extremidades, figura 1.7.a; caso a viga tenha mais de dois apoios, o problema torna-se indeterminado para a Mecânica , pois o número de incógnitas é maior que o número de equações figura 1.7.b.

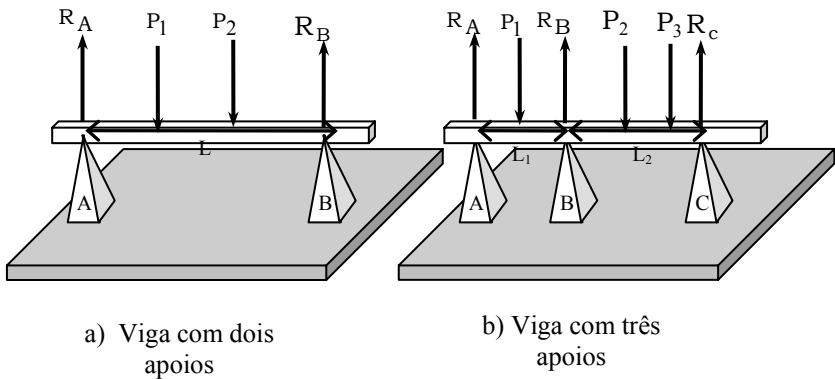


Figura 1.7 Viga com dois e três apoios

Para a resolução de tais problemas torna-se necessário a introdução de novas equações de modo que seja suficiente para a determinação do sistema, e isso será possível se levar em consideração as propriedades dos materiais. Este é o campo da Resistência dos Materiais e ela é a parte da Mecânica dos Corpos Sólidos no qual se estuda o equilíbrio dos corpos, levando-se em conta, as deformações sofridas por efeito de cargas atuantes.

1.3 Objetivo da Resistência dos Materiais.

O objetivo da Resistência dos Materiais é estudar as forças externas e internas que atuam nas peças de uma construção ou máquina de modo a resolver os problemas:

- Projetoando uma peça, verificar sua estabilidade;
- Calcular as dimensões das peças para resistir aos esforços solicitados.

1.4 Princípio Fundamental

Dado um sólido sujeito a um sistema de forças em equilíbrio, considerando-se então qualquer porção deste sólido, a mesma está em equilíbrio e a qual se aplicam os teoremas gerais da Mecânica. Toda parte de um corpo em equilíbrio, está em equilíbrio.

Ações moleculares são as ações das partículas de uma parte do corpo sobre as partículas da outra parte do corpo. Elas estão sempre aos pares: 1 sobre 2 e 2 sobre 1 figura 1.8.

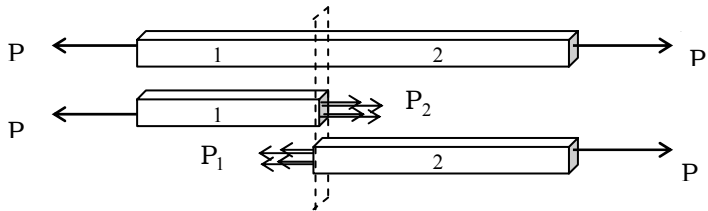


Figura 1.8 Sólido em equilíbrio

1.5 Hipótese Simplificadoras

Os sólidos materiais serão considerados (Santos, 1999):

- a) Homogêneos. Quando apresenta as mesmas propriedades mecânicas, em todos os seus pontos, numa dada direção;
- b) Isótropos. Possuem as mesmas propriedades mecânicas, qualquer que seja a direção escolhida;
- c) Contínuos. Quando a distribuição de matéria é continua em todo o seu corpo.

1.6 Tensão

A força por unidade de área ou a intensidade das forças distribuídas numa certa seção transversal é chamada tensão atuante (figura 1.9), nessa seção, e é representada matematicamente por (Beer and Johnston, 1989):

$$\sigma = \frac{P}{A}, \quad (1.1)$$

onde:

P – é o módulo de \vec{P} ;

A – é a área da seção transversal.

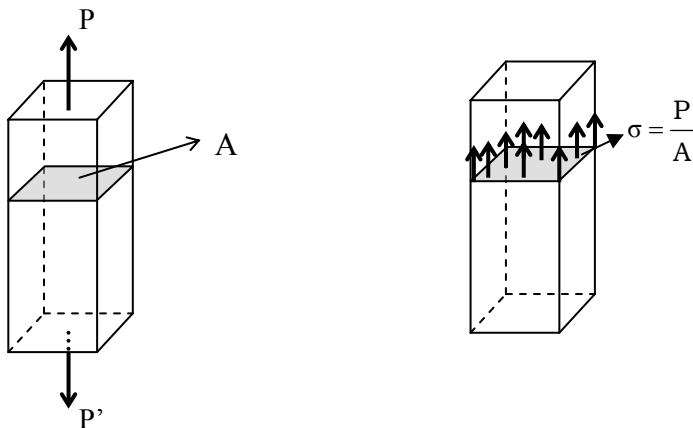


Figura 1.9 Tensão

A figura 1.9 mostra a tensão em barra de seção transversal A , sujeita a uma força axial \vec{P}^* . Para indicar a tensão de tração (barras tracionadas) usa-se o sinal positivo; o sinal negativo indica tensão de compressão (barras comprimidas).

* Força aplicada na direção do eixo da peça; seção transversal perpendicular a este eixo.

A unidade de tensão no SI é N/m^2 , que é denominada de pascal (Pa) e tem como múltiplo, o quilopascal (kPa), o megapascal (MPa) e o gigapascal (GPa), então:

$$1\text{kPa} = 10^3 \text{ Pa} = 10^3 \text{ N/m}^2$$

$$1\text{MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 10^6 \text{ N/m}^2$$

$$1\text{GPa} = 10^9 \text{ Pa} = 10^9 \text{ N/m}^2$$

É comum decompor a força \vec{P} em componente perpendicular e paralela à seção. Quando esta força é normal ou perpendicular à seção é chamada de tensão normal, equação 1.1. A figura 1.9 mostra a força axial e neste caso tem-se a tensão normal que representa o valor médio das tensões na seção transversal.

Para se ter a tensão em um dado ponto Q na seção transversal, deve-se considerar um pequena área ΔA , figura 1.10.

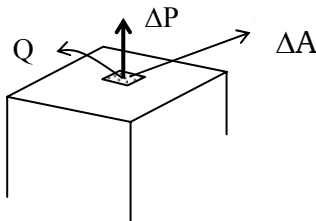


Figura 1.10 Tensão no ponto Q

Dividindo-se a intensidade ΔP por ΔA , obtém-se o valor médio da tensão em ΔA ; fazendo ΔA tender a zero, tem-se a tensão no ponto Q, isto é:

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta A}. \quad (1.2)$$

De modo geral, o valor obtido para a tensão no ponto Q é diferente do obtido pela equação 1.1, isto é, a tensão média.

A distribuição real das tensões em uma certa seção transversal é estatisticamente indeterminada. Para se conhecer qualquer dado a mais sobre essa distribuição, precisa-se lançar mão da consideração das deformações que resultam das diferentes maneiras de se aplicar a carga nos extremos da barra. Na prática, é suposto que a distribuição das tensões é uniforme em uma barra carregada axialmente, com exceção das seções nas vizinhanças do ponto de aplicação da carga. Então, uma distribuição uniforme de tensões só é possível se a linha de ação das forças aplicadas \vec{P} e \vec{P}' passar pelo centróide da seção considerada, figura 1.11.

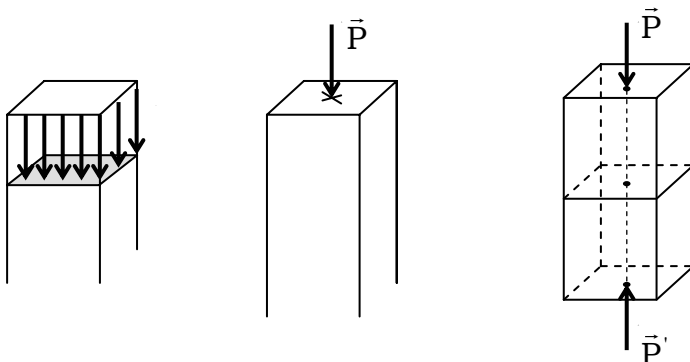


Figura 1.11 Forças aplicadas \vec{P}, \vec{P}'

Este tipo de carregamento é chamado de carga centrada e será adotado como carregamento atuante em todas as barras de eixo reto (treliças e estruturas reticuladas → barras conectadas por pinos) (Beer and Johnston, 1989).

Quando duas forças \vec{P} e \vec{P}' são aplicadas a uma barra AB na direção transversal a ela, ocorre a tensão de cisalhamento, figura 1.12.

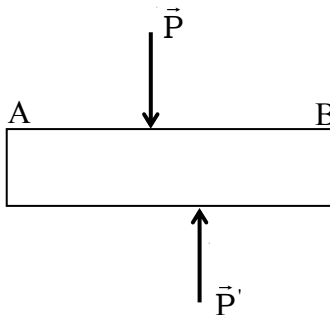


Figura 1.12 Tensão de cisalhamento

Então,

$$\tau = \frac{P}{A}, \quad (1.3)$$

onde A é a área da seção transversal e P é a força paralela a esta seção.

Deve-se ter em mente que o valor obtido pela equação 1.3 é um valor médio das tensões de cisalhamento e sua distribuição na seção transversal não pode ser assumida como uniforme.

A tensão de cisalhamento ocorre comumente em parafusos, rebites e pinos que ligam as diversas partes de estruturas.

A força \bar{P} é também chamada de força cortante na seção.

Exemplo 1.

A estrutura representada na figura 1.13 consiste das barras AB e BC, verificar se ela suporta a carga de 30 kN com segurança. A barra BC é de aço e tem diâmetro de 20 mm (Beer and Johnston, 1989).

- 1) Determinar as forças;
- 2) Determinar as tensões;
- 3) Substituindo as barras de aço por alumínio, qual o diâmetro mínimo da barra?

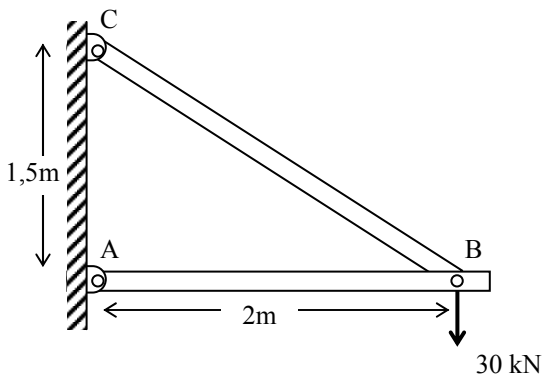
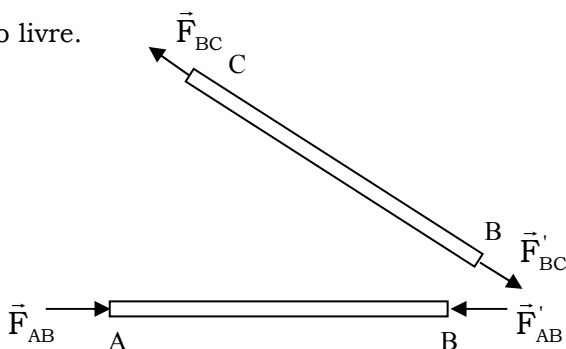


Figura 1.13 Estrutura

Resolução:

Diagrama do corpo livre.

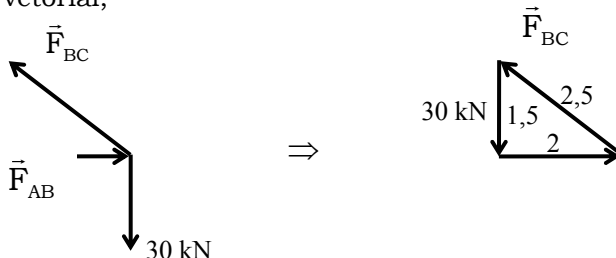


Então do diagrama do corpo livre, temos as forças nas extremidades das barras:

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}'_{AB} \Rightarrow F_{AB} ,$$

$$\vec{F}_{BC} = -\vec{F}'_{BC} \Rightarrow F_{BC} ,$$

e do calculo vetorial,



e da relação de semelhança de triângulos vem que (polígono de forças):

$$\frac{F_{AB}}{2} = \frac{F_{BC}}{2,5} = \frac{30 \text{ kN}}{1,5} \Rightarrow \begin{aligned} F_{AB} &= 40 \text{ kN} , \\ F_{BC} &= 50 \text{ kN} . \end{aligned}$$

Observa-se, que a barra BC está sob efeito de tração enquanto a AB está sob o de compressão. No presente caso, o valor encontrado para a barra BC não quer dizer que ela suporta a carga com segurança. Deste modo, tem-se que levar em consideração a área da seção transversal como também o material com que ela foi construída. Para saber se a barra BC vai ou não se romper sob ação da força F_{BC} é necessário determinar a tensão de tração.

Então, supondo que a barra é constituída de aço e tem diâmetro de 20mm, vem que:

$$\sigma_{BC} = \frac{F_{BC}}{A}$$

$$A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\frac{20 \times 10^{-3}}{2} \right)^2 = 314 \times 10^{-6} \text{ m}^2 ,$$

$$\sigma_{BC} = \frac{+50 \times 10^3}{314 \times 10^{-6}} = +159 \times 10^6 \text{ Pa} = 159 \text{ MPa} .$$

Através de tabelas de propriedades de materiais, verifica-se que a tensão máxima admissível para o aço utilizado é 165 MPa e como o valor encontrado para a barra é inferior a σ_{adm} , conclui-se que a barra suporta com segurança a carga aplicada.

Supondo agora que a estrutura é de alumínio, qual deve ser o diâmetro da barra, para suportar com segurança a carga aplicada?

Da tabela de propriedades dos materiais encontra-se para o alumínio:

$$\bar{\sigma} \text{ ou } \sigma_{adm} = 100 \text{ MPa},$$

então,

$$A = \frac{F_{BC}}{\sigma_{adm}} = \frac{50 \times 10^3}{100 \times 10^6} = 500 \times 10^{-6} \text{ m}^2 ,$$

e

$$r = \left(\frac{A}{\pi} \right)^{1/2} = 0,01262 \text{ m}$$

e então,

$$\Phi = 2.r = 25,24 \text{ mm}$$

que é o diâmetro adequado para a barra BC.

A barra AB está sendo comprimida pela ação da força $F_{AB} = 40 \text{ kN}$ e a área da seção transversal é $A = 30 \text{ mm} \times 50 \text{ mm}$, a tensão média é dada por:

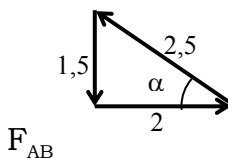
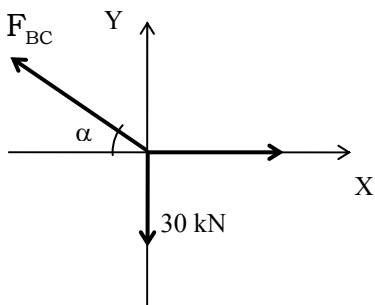
$$\sigma_{AB} = \frac{-40 \times 10^3}{1,5 \times 10^{-3}} = -26,7 \text{ MPa}.$$

Outro modo de calcular as forças F_{AB} e F_{BC} é através das equações de equilíbrio (da estática) para um corpo rígido, ou seja:

$$\sum F_x = 0 ,$$

$$\sum F_y = 0 ,$$

então, tem-se que:



$$\tan \alpha = \frac{1,5}{2,0} = 0,75 \Rightarrow \alpha \approx 36,86^\circ,$$

$$\sum F_x = F_{AB} - F_{BC} \cdot \cos 36,86 = 0,$$

$$\sum F_y = F_{BC} \cdot \sin 36,86 - 30 \cdot 10^{-3} = 0,$$

$$F_{BC} = \frac{30 \times 10^3}{\sin 36,86} = \frac{30 \times 10^3}{0,5999} \approx 50 \text{ kN},$$

$$F_{BC} = 50 \times 10^3 \times 0,800 = 40 \text{ kN} .$$

1.7 Propriedades Mecânicas dos Materiais

De um modo geral, os materiais se caracterizam pelas seguintes propriedades:

- a) Dúctil;
- b) Frágil;
- c) Elástico;
- d) Plástico.

a) Dúctil:

É quando o material apresenta grandes deformações antes de se romper. Por exemplo: aço, alumínio.

b) Frágil:

O material é frágil, quando se deforma relativamente pouco** antes de se romper. Exemplo: ferro fundido, concreto.

c) Elástico:

As deformações sofridas por um material quando está sob a ação de uma força (carga) cessam, quando esta força deixa de atuar. Exemplo: madeira, borracha.

d) Plástico:

Quando o material não retorna a forma inicial após a força (carga) ser retirada. Exemplo: argila úmida.

1.7.1 Lei de Hooke (Robert Hooke, 1678)

Através de experiências diretas relativas à deformações de barras prismáticas estabeleceu-se, para vários materiais estruturais que o alongamento de barra, entre certos limites, é

** ou não se deforma.

proporcional à força de tração. Esta relação linear entre a força e o alongamento, foi formulada por Robert Hooke, em 1678 e é representada por (Timoshenko, 1972):

$$\delta = \frac{P.L}{A.E}, \quad (1.4)$$

onde:

δ : alongamento ou deformação da barra;

P: força que produz a deformação da barra;

L: comprimento da barra;

A: área da seção transversal;

E: constante elástica do material, chamada de módulo de elasticidade (módulo de Young, unidade Pa).

A deformação específica é dada por:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}, \quad (1.5)$$

e da equação 1.4 vem que:

$$\frac{\delta}{L} = \frac{P}{A.E} = \frac{\sigma}{E} = \varepsilon, \quad (1.6)$$

que é outro modo de representar a deformação específica e ela é adimensional (m/m).

Exemplo 2.

Considera-se uma barra de comprimento $L=0,600$ m e de seção transversal uniforme, que se deforma de um valor $\delta=150 \times 10^{-6}$ m. Qual a deformação específica?

$$\varepsilon = \frac{150 \times 10^{-6} \text{ m}}{0,600 \text{ m}} = 250 \times 10^{-6} ,$$

ou simplesmente: $\varepsilon = 250 \mu$.

1.7.2 Diagrama Tensão - Deformação

O diagrama que representa as relações entre as tensões e deformações específicas de um certo material é uma característica sua e a obtenção deste diagrama (do material), é feito normalmente em um ensaio de tração (Beer and Johnston, 1989). O diagrama tensão - deformação varia muito de material para material, e, para um mesmo material, podem ocorrer resultados diferentes em vários ensaios. Entre os diagramas tensão (σ) - deformação (ε) de vários grupos de materiais é possível distinguir algumas características comuns, isto é, classificá-los em materiais dúcteis e frágeis.

A figura 1.14 mostra o diagrama $\sigma \times \varepsilon$ para uma material dúctil (aço temperado):

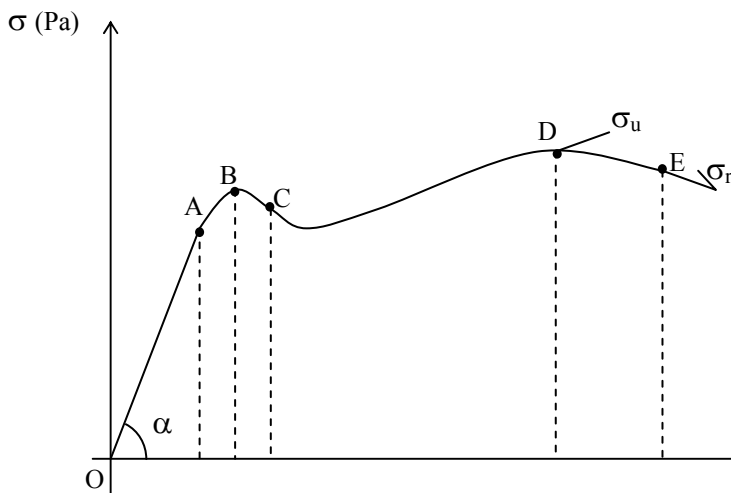


Figura 1.14 Diagrama $\sigma \times \varepsilon$

Pela figura 1.14 pode-se fazer as seguintes análises:

- De O a A a tensão e a deformação são proporcionais, é a fase elástica do material. O ponto B é o limite de elasticidade e é até onde o material se comporta como elástico. A tensão correspondente ao ponto C é chamada de limite de escoamento e a partir desse ponto, o material se deforma sem acréscimo apreciável da força de tração. Após o escoamento da barra, o material sofre um revigoramento até o ponto D que representa a tensão máxima que é conhecida como tensão última, σ_u .
- O ponto E, representa o ponto de ruptura do material e é onde se define a tensão de ruptura, σ_r .

No diagrama, o trecho ABC é a fase de escoamento, CD é a de recuperação do material e DE a de estricção onde a carga

atinge um valor que provoca a perda de resistência do material até a sua ruptura. Existem casos em que a ruptura acontece em uma tensão abaixo da de ruptura, provocada pelo fenômeno conhecido como fadiga.

Materiais frágeis, como o ferro fundido, vidro e pedra, são caracterizados por uma ruptura que ocorre sem nenhuma mudança sensível no modo de deformação do material. Então, para os materiais frágeis não existe diferença entre tensão última e a de ruptura, figura 1.15. Além disso, a deformação até a ruptura é muito menor nos materiais frágeis do que nos materiais dúcteis.

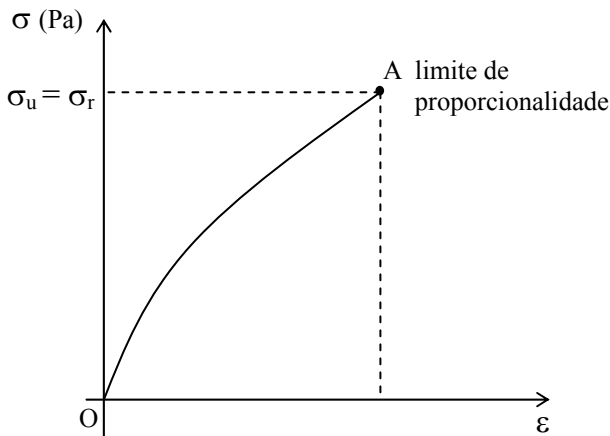


Figura 1.15 Diagrama $\sigma \times \epsilon$ (material frágil)

Na figura 1.14, o trecho OA , linear, representa a Lei de Hooke, e escreve-se:

$$\sigma = \epsilon \cdot E \quad (\text{Lei de Hooke}), \quad (1.7)$$

onde E representa a tangente do ângulo que o segmento OA forma com o eixo ϵ , ou então:

$$E = \tan \alpha. \quad (1.8)$$

A tensão correspondente ao ponto B recebe o nome de limite de proporcionalidade e representa o valor máximo da tensão para o qual a Lei de Hooke é válida.

O módulo de elasticidade E corresponde a uma propriedade de um certo material e é expresso na mesma unidade da tensão σ (Pa ou seus múltiplos no SI).

1.7.3 Deformações de Barras Sujeitas a Cargas Axiais

A equação 1.4 só pode ser usada se a barra for homogênea (módulo E constante), tiver seção transversal uniforme de área constante e a força (carga) for aplicada nas suas extremidades. Se as forças forem aplicadas em outros pontos, ou se a barra consiste de várias partes, figura 1.16, com diferentes seções transversais ou compostas de diferente materiais, deve-se dividi-las em segmentos, que individualmente satisfaçam as condições de aplicação da equação 1.4. Chamando de P_i , L_i , A_i e E_i grandezas correspondentes aos elementos i , então a deformação total da barra é dada por:

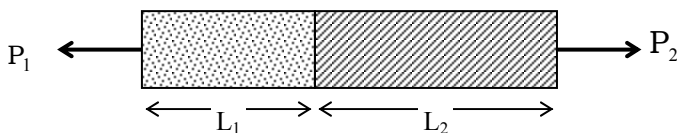


Figura 1.16 Barra de seções transversais

$$\delta = \sum_i \frac{P_i \cdot L_i}{A_i \cdot E_i}. \quad (1.9)$$

No caso de barras com seção transversal variável, figura 1.17, a deformação específica ε depende da posição do ponto Q, onde ela é definida e considera-se um pequeno elemento de comprimento inicial dx . Chamando $d\delta$ a deformação do elemento sob a ação de uma carga P , a deformação específica normal no ponto Q é dada por:

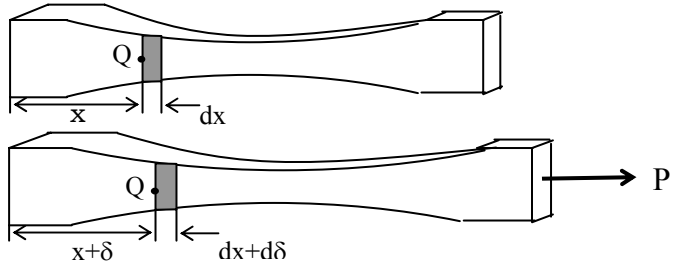


Figura 1.17 Seção transversal variável

$$\varepsilon = \frac{d\delta}{dx}, \quad (1.10)$$

então,

$$d\delta = \varepsilon \cdot dx, \quad (1.11)$$

$$\varepsilon = \frac{P}{A \cdot E},$$

e substituindo ε , equação acima, na equação 1.11 vem que :

$$\delta = \int_0^L \frac{P \cdot dx}{A \cdot E}. \quad (1.13)$$

A equação 1.13 deve ser usada no lugar da equação 1.4 quando a área da seção transversal varia como função de x e

também quando a forma interna P depende de x , como é o caso da barra sujeita ao próprio peso.

1.7.4 Coeficiente de Poisson

Quando uma barra é submetida a uma tração simples, verifica-se um acréscimo de comprimento na direção da força, e um decréscimo nas dimensões transversais, perpendicularmente ao eixo da barra. E quando submetida a uma compressão, ela se reduz longitudinalmente e se expande lateralmente, ver figura 1.18 (Nash,1982).

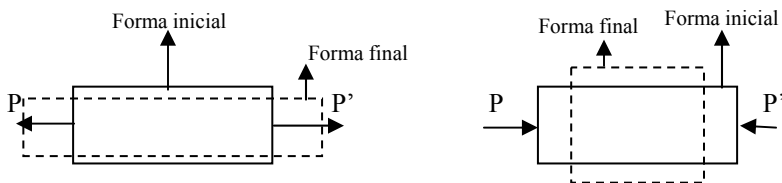


Figura 1.18 Tração e compressão

A relação entre a deformação transversal e a longitudinal recebe o nome de coeficiente de Poisson e é dado por:

$$\nu = \left| \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon} \right| = -\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon} , \quad (1.14)$$

onde ε_t é a deformação transversal e ε a axial (longitudinal) e do sinal negativo, conclui-se que :

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon > 0 , \varepsilon_t < 0 , \\ \varepsilon < 0 , \varepsilon_t > 0 , \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{A um acréscimo em uma direção corresponde uma redução na} \\ \text{outra, efeitos opostos.} \end{array}$$

1.7.5 Lei de Hooke Generalizada

Em todos os materiais, o alongamento produzido por uma força \vec{P} na direção dessa força é acompanhado por uma contração em qualquer direção transversal, figura 1.19. Supondo que o material em estudo é homogêneo, isto é, considerando que suas propriedades mecânicas são independentes do ponto em questão; isótropo quando suas propriedades mecânicas são independentes da direção considerada, então a deformação específica deve ser a mesma em qualquer direção transversal (Beer and Johnston, 1989),

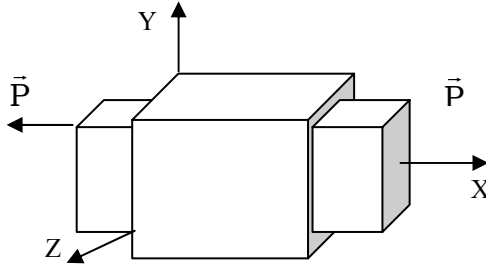


Figura 1.19 Contração

isto é, $\varepsilon_z = \varepsilon_y$.

Sabe-se que:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_x} \Rightarrow \varepsilon_t = -\nu \varepsilon_x ,$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} , \quad (1.15)$$

então,

$$\varepsilon_t = \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x ,$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E}, \quad (1.16)$$

e

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}.$$

A generalização da Lei de Hooke se baseia no princípio da superposição que supõe que a tensão ou deformação resultante em um sistema devido a aplicação de várias forças é a soma algébrica dos seus efeitos, quando aplicados separadamente. Este princípio é válido dentro de um limite de proporcionalidade do material, e se existir uma relação direta e linear entre cada força aplicada (causa) e efeito provocado (consequência).

Uma tensão na direção X provoca uma deformação específica positiva no eixo X, igual a σ_x/E , e deformações específicas negativas nos eixos Y e Z, iguais a $-\nu \cdot \sigma_x/E$.

Do mesmo modo, uma tensão positiva na direção Y provoca uma deformação específica positiva igual no eixo Y, igual a σ_y/E , e deformações específicas negativas, nos eixos X e Z, iguais a $-\nu \cdot \sigma_y/E$. Do mesmo modo, em relação ao eixo Z.

Então as deformações específicas nas três direções dos eixos coordenados são obtidas, combinando-se os resultados acima mencionados:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= +\frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}, \\ \varepsilon_y &= -\nu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}, \\ \varepsilon_z &= -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

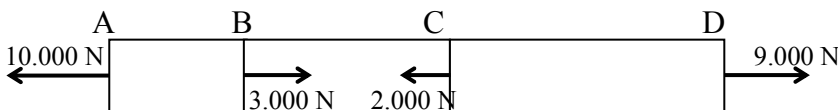
As equações 1.17 exprimem a generalização da Lei de Hooke para carregamento multiaxial e fornece a deformação específica do corpo. Para se obter a deformação total (elongação) do corpo, em uma dada direção, por exemplo, na direção X faz-se:

$$\delta_x = \epsilon_x \cdot L_x . \quad (1.18)$$

Exercícios Propostos

- 1) Uma barra de aço, cujo módulo de elasticidade $E=2 \times 10^6 \text{ N/cm}^2$, de seção quadrada e comprimento 5m, sofre uma deformação de 2 mm para uma carga de 10^3 N . Calcular o lado do quadrado e a tensão de tração.
- 2) Uma barra de 3 m de comprimento tem seção transversal retangular de 3cm x 1cm. Determinar a deformação produzido pela força axial de 6N. $E=2 \times 10^3 \text{ N/cm}^2$.
- 3) Determinar a força de tração numa barra cilíndrica com 3 cm de diâmetro, sendo a deformação específica $\epsilon = 0,7 \times 10^{-3}$ e $E=21 \times 10^5 \text{ N/cm}^2$.
- 4) Calcular a força de tração necessária para romper uma barra de aço doce cuja seção é uma triângulo equilátero de 4 cm de lado. A tensão de ruptura é $\sigma_r=4 \times 10^3 \text{ N/cm}^2$.
- 5) Uma barra prismática, de comprimento $L= 4 \text{ m}$, tem para deformação específica $\epsilon =0,001$. Calcular seu comprimento final L_1 , depois da deformação.

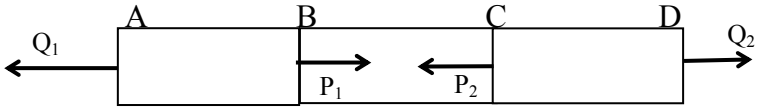
- 6) Uma barra prismática de comprimento $L = 2,348$ m passa a ter, depois de dilatar-se, o comprimento $L_1 = 2,353$ m. Calcular sua deformação específica.
- 7) Uma barra prismática de 3 m de comprimento é sujeito a uma força de tração $P=500$ N e alonga-se de $\delta=3$ cm. Determinar o módulo de elasticidade do material, sendo a área da seção transversal $A=0,25$ cm².
- 8) Uma barra prismática de aço de 60 cm de comprimento é alongada de 0,06 cm sob ação de uma força de tração. Determinar esta força sendo o volume da barra de 400 cm³ e o módulo $E = 21 \times 10^9$ Pa.
- 9) Uma barra prismática tem, antes de sua deformação, o comprimento $L_0 = 0,536$ m e depois $L=0,535$ m. Calcular sua deformação específica.
- 10) A figura seguinte, mostra uma barra de aço com seção transversal de área $A= 10$ cm² e está solicitada pelas forças axiais nela indicadas. Determinar a deformação da barra, sabendo-se que $E = 21 \times 10^9$ Pa.



$AB = 2$ m; $BC = 3$ m; $CD = 4$ m.

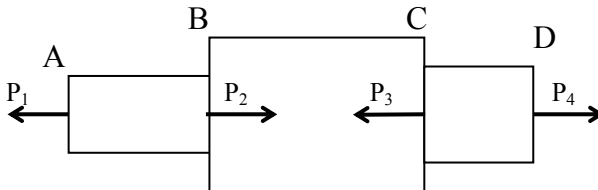
- 11) Pede-se o alongamento total da barra AD de aço, cuja seção transversal é de 6 cm² e está submetida a ação das forças $Q= 5.000$ N e $P 2.500$ N, conforme a figura seguinte. Pedem-se ainda as tensões nos trechos e verificar se há estabilidade

para $\bar{\sigma} = 10 \times 10^6$ Pa. Dados: $E = 2 \times 10^{10}$ Pa; $AB = BC = CD = 25$ cm.



- 12) A figura abaixo, representa uma barra de aço de seção transversal variável e está sob ação de forças nela indicadas. Determinar a deformação da barra, sendo dados:

$P_1 = 200$ N; $P_2 = 350$ N; $P_3 = 300$ N; $P_4 = 150$ N;
 $A_{AB} = 2,0 \text{ cm}^2$; $A_{BC} = 3,0 \text{ cm}^2$; $A_{CD} = 2,5 \text{ cm}^2$;
 $L_{AB} = 2,0$ m; $L_{BC} = 1,0$ m; $L_{CD} = 1,5$ m; $E = 2 \times 10^9$ N/m².



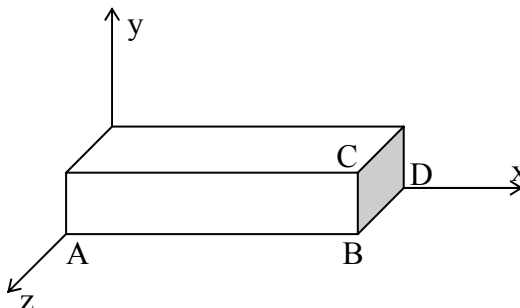
- 13) Calcular o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson de uma barra de alumínio de 60 mm de diâmetro e 300 mm de comprimento sob a ação de uma força axial de 100 kN. A deformação axial resultante é de 0,205 mm, ao passo que o diâmetro reduziu-se em 0,01515 mm.
- 14) Um cubo de aço de 40 mm sofre uma pressão uniforme de 200.000 kN/m² sobre todas as suas faces. Determinar a variação da dimensão entre duas de suas faces opostas. Dados: $E = 200 \times 10^6$ kN/m² e $\nu = 0,25$.

- 15) O prisma de aço, conforme a figura seguinte, está sujeito a pressão uniforme em todas as suas faces. O comprimento AB sofreu uma deformação de $-0,000030$ m. Determinar:

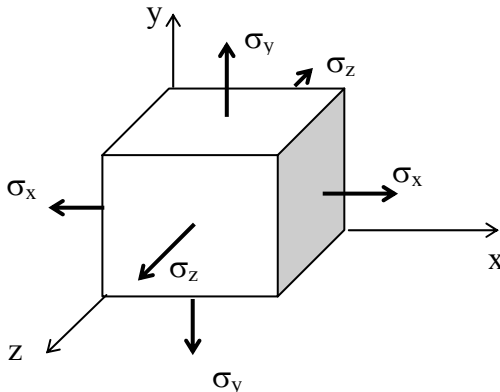
- a) a variação dos comprimentos BC e BD;
b) a pressão aplicada nas faces do bloco.

Dados: $E = 200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$; $\nu = 0,25$.

AB=100 mm BD=80 mm BC=50 mm

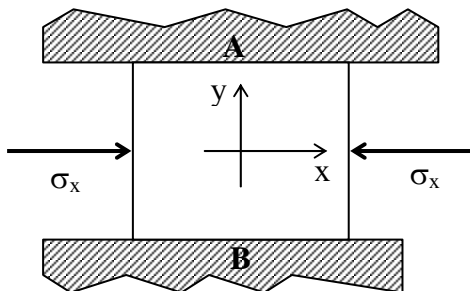


- 16) Um cubo, figura seguinte, está sujeito a tensões normais. Sendo o módulo de elasticidade $E = 2 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ e o coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$, pede-se calcular a deformação específica longitudinal na direção do eixo x. Dados: $\sigma_x = 100 \text{ N/m}^2$; $\sigma_y = 0$; $\sigma_z = 200 \text{ N/m}^2$.

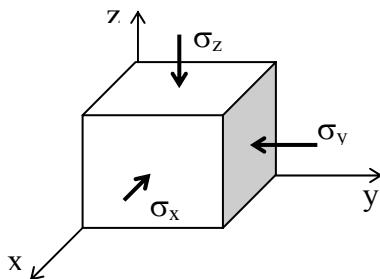


- 17) A chapa da figura abaixo é submetida a tensões de compressão, na direção x , de 50 N/m^2 . Sabe-se que a deformação é impedida na direção y , devido a presença de elementos fixos A e B. Pede-se calcular a deformação específica longitudinal na direção x .

Dados : $\nu = 0,2$; $E = 2 \times 10^6 \text{ N/m}^2$; $\sigma_z = 0$.



- 18) Um prisma está submetido a tensões normais de $\sigma_x = 40 \text{ N/m}^2$, $\sigma_y = 60 \text{ N/m}^2$ e $\sigma_z = 50 \text{ N/m}^2$, conforme indicado na figura seguinte. Determinar as deformações específicas nas direções x , y e z . Dados: $E = 10^6 \text{ N/m}^2$; $\nu = 0,25$.



Respostas dos Exercícios Propostos

- 1- 11 mm; 8×10^6 Pa.
- 2- 3mm.
- 3- $1,0391 \times 10^4$ N.
- 4- 27,71 kN.
- 5- 4,004 m.
- 6- 0,00213.
- 7- 2×10^9 Pa.
- 8- 14 kN.
- 9- -0,00187.
- 10- 3,67 mm.
- 11- 0,26mm ; 833×10^4 Pa; 417×10^4 Pa; 833×10^4 Pa.
- 12- 1,2 mm.
- 13- 51,76 GPa; 0,3697.
- 14- -0,02 mm.
- 15- -0,015 mm; -0,024 mm; 120×10^6 N/m².
- 16- 2×10^{-5} .
- 17- -24×10^{-6} .
- 18- $-12,5 \times 10^{-6}$; $-37,5 \times 10^{-6}$; -25×10^{-6} .