

3. Estado Plano e Múltiplo de Tensões

3.1 Deformação de Cisalhamento em Planos Perpendiculares

As equações 1.17, relacionando as tensões normais e deformações específicas, foram deduzidas supondo-se que não havia tensões de cisalhamento envolvidas. A figura 3.1 mostra o caso de estado de tensões mais geral agindo sobre um cubo elementar. Esta figura apresenta as tensões normais σ_x , σ_y , σ_z bem como as tensões de cisalhamento τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} (as correspondentes τ_{yx} , τ_{zx} , τ_{zy}). Estas tensões não tem nenhum efeito direto nas deformações específicas e enquanto elas permanecerem pequenas, não vão influenciar a dedução nem a validade das equações 1.17. [Beer and Johnston, 1989].

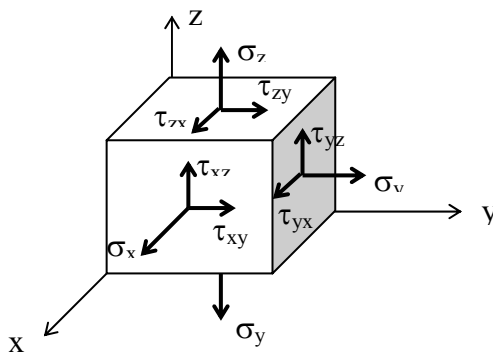


Figura 3.1 Tensões normais e cisalhamento

Por exemplo, as tensões de cisalhamento τ_{xy} e τ_{yx} tendem a deformar o cubo elementar na forma de um romboide segundo um ângulo γ (γ_{xy}), chamado de deformação de cisalhamento, figura 3.2; as faces se transformam em losangos,

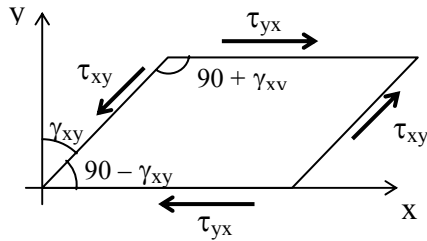


Figura 3.2 Deformação de cisalhamento γ

e

$$\gamma \cong \tan \gamma_{xy} , \quad (3.1)$$

em radianos e é positivo e neste caso a deformação provoca uma redução em γ_{xy} . As tensões de cisalhamentos em planos mutuamente perpendiculares de um elemento infinitesimal são numericamente iguais (Teorema de Cauchy), então:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} , \quad (3.2)$$

Para os valores de tensão que não excedam o limite de proporcionalidade no cisalhamento, pode-se escrever então (nos materiais homogêneos e isotrópicos):

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} , \quad (3.3)$$

e essa relação é a Lei de Hooke para tensões e deformações de cisalhamento, onde G é o módulo de elasticidade transversal do material e expresso nas mesmas unidades de τ_{xy} , pascal. Deste modo, pode-se escrever as seguintes equações adicionais:

$$\begin{aligned} \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} , \\ \tau_{zx} &= G\gamma_{zx} . \end{aligned} \quad (3.4)$$

É possível relacionar o módulo de elasticidade transversal

G com o módulo de elasticidade E e o coeficiente de Poisson através da seguinte equação:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (3.5)$$

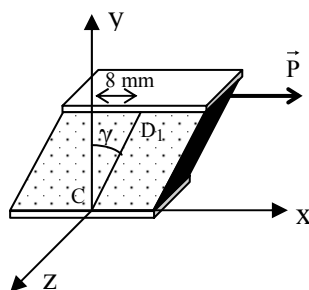
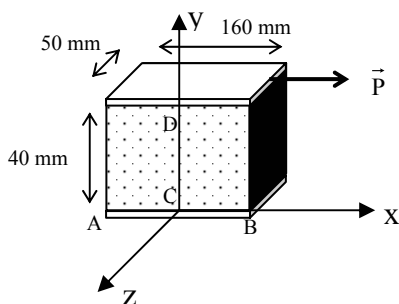
Em resumo : só há variação de forma; o volume se mantém.

Exemplo

Um prisma retangular é feito de material que tem módulo de elasticidade transversal $G = 600 \text{ MPa}$. Ao prisma é colado duas chapas horizontais rígidas. A chapa inferior é fixa e a superior é submetida a uma força \vec{P} provocando um movimento de $0,8 \text{ mm}$. Determinar :

a) A deformação de cisalhamento

b) a força \vec{P} .



a)

$$\gamma_{xy} \cong \tan \gamma_{xy}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{0,8}{40} = 0,020 \text{ rad}$$

b) Cálculo de τ_{xy}

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = 600 \times 10^6 \times 0,020 = 12 \text{ MPa}$$

Cálculo da força \vec{P}

$$P = \tau_{xy} \cdot A$$

$$A = 0,160 \times 0,050 = 0,008 \text{ m}^2$$

$$P = 12 \times 10^6 \times 0,008 = 96 \times 10^3 \text{ N}$$

3.2 Concentração de Tensões

Adotou-se até este ponto que as tensões normais são uniformemente distribuídas em qualquer seção transversal perpendicular ao eixo de uma barra, no caso a força axial. Se a uniformidade for interrompida, ou se a força for aplicada sobre uma área muito pequena existirão perturbações na tensão. Esse é o enfoque encontrado em textos mais avançados onde a Teoria da Elasticidade utiliza-se de métodos matemáticos, como por exemplo de Elementos Finitos, para a determinação de tensões em uma barra. [Beer and Johnston, 1989]. Se as forças são aplicadas no centro das placas, estas deverão se mover de uma direção a outra sem rotação, provocando um encurtamento da barra e um aumento da largura e na espessura. Assume-se que o eixo da barra se mantém retilíneo e que as seções planas se mantêm planas e que todos os elementos se deformam da mesma maneira. A seguir será feita uma análise qualitativa do problema.

A figura 3.3a mostra um bloco que encontra sob a compressão \vec{P} , podendo-se determinar a $\sigma = \frac{P}{A}$.

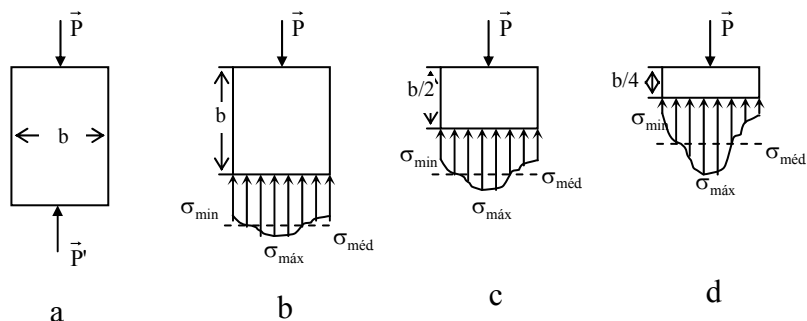


Figura 3.3 Bloco em compressão

Através de um raciocínio lógico percebe-se que as deformações são maiores nas proximidades do ponto onde a força é aplicada. Logo, as tensões correspondentes devem ser máximas. As figuras 3.3b, 3.3c, 3.3d mostram a distribuição de tensão para as diversas seções. Nota-se que quanto mais próximo da força aplicada, maior a tensão normal. Estes resultados, que não se aplicam somente a carregamento axial, mas a qualquer tipo de carregamento, é conhecido como princípio de *Saint-Venant* da rápida dissipação de tensões localizadas: “O efeito de forças ou tensões aplicadas sobre uma área pequena pode ser tratada como um sistema estaticamente equivalente, o qual, a uma distância aproximadamente igual a largura ou espessura do corpo, provoca distribuição de tensões que obedecem a uma lei simplificada”.

Deste modo, para a distância b a expressão $\sigma = P/A$ é válida, e que para qualquer nível onde a tensão é investigada com precisão, a tensão média é dada pela mesma expressão. A tensão máxima σ_{\max} . Se relaciona com a tensão média através da relação:

$$K = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{med}}} \quad , \quad (3.6)$$

onde K é o coeficiente de concentração de tensões.

A tabela 3.1, mostra a relação entre as σ_{\max} , σ_{med} , σ_{\min} em função da distância b .

Tabela 3.1 Relação entre as tensões e b

Distância	σ_{\max}	σ_{\min}
b	1,027 σ_{med}	0,973 σ_{med}
b/2	1,387 σ_{med}	0,668 σ_{med}
b/4	2,575 σ_{med}	0,198 σ_{med}

3.3 Tensão Admissível

Para o projeto de novas peças e estruturas bem como para análises daqueles já existentes é importante que se conheça como o material que compõe irá atuar sob condições de carregamento conhecidas, o que geralmente pode ser feito em testes laboratoriais. Uma força necessária para provocar a ruptura de uma peça é chamada de carregamento último P_u (ver seção 1.7.2). A tensão associada é a tensão última σ_u e se relaciona através de.

$$\sigma_u = \frac{P_u}{A}. \quad (3.7)$$

Para o projeto destas novas peças, a chamada tensão admissível $\bar{\sigma}$ é definida em patamares bastante inferiores a σ_u . O fator ou coeficiente de segurança FS é a razão entre o carregamento último e o admissível, isto é,

$$FS = \frac{P_u}{P}, \quad (3.8)$$

mas

$$P_u = \sigma_u \cdot A \quad \text{e} \quad \bar{P} = \bar{\sigma} \cdot A ,$$

o fator de segurança pode ser reescrito como:

$$FS = \frac{\sigma_u}{\sigma}. \quad (3.9)$$

Pode-se dizer que se deseja um $\bar{\sigma}$ que satisfaça a relação.

$$\bar{\sigma} \geq \frac{P}{A}. \quad (3.10)$$

3.4 Análise de Tensões e Deformações. Círculo de Mohr

Conforme visto anteriormente, o estado mais geral de tensões, em um ponto P, pode ser representado por seis componentes: σ_x , σ_y e σ_z representando as tensões normais exercidas nas faces de um cubo elementar, centrado no ponto, e, τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} representando as tensões de cisalhamento, todas agindo no mesmo cubo, dentro de um sistema de coordenadas.

O propósito desta seção é determinar como se transformam as componentes das tensões quando ocorre uma rotação dos eixos coordenados.

O caso se situa dentro do chamado “estado plano de tensões”, nos quais duas das faces do cubo elementar se encontram isentas de tensões. Este seria o caso de uma chapa fina, submetida a forças que atuam no plano médio de tensões (onde $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$) representado pelas respectivas componentes de tensão σ_x , σ_y e τ_{xy} conforme a figura 3.4.

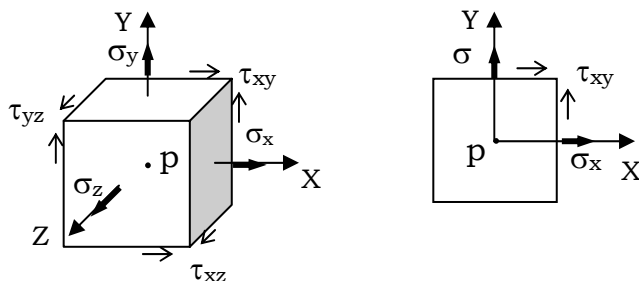


Figura 3.4 Ponto sob estado de tensão

Deseja-se encontrar as componentes σ_x , σ_y e τ_{xy} relativas as rotações deste cubo, em torno do eixo Z, em um ângulo θ , figura 3.5.

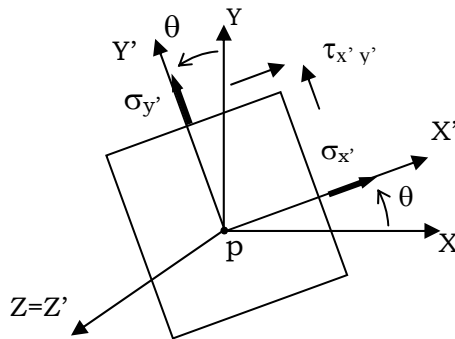


Figura 3.5 Rotações centradas no ponto

Após desenvolvimentos matemáticos apresentados, por exemplo, por Beer & Jonhston (1989), tem-se que, para a componente $\sigma_{x'}$:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\theta + \tau_{xy} \cdot \sin 2\theta \quad (3.11)$$

para a componente $\sigma_{y'}$:

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\theta - \tau_{xy} \cdot \sin 2\theta \quad (3.12)$$

e para componente $\tau_{x'y'}$:

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\theta + \tau_{xy} \cdot \cos 2\theta. \quad (3.13)$$

Considerando as equações 3.11 e 3.12 , verifica-se que:

$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y. \quad (3.14)$$

Como $\sigma_z = \sigma_{z'} = 0$, pode-se concluir que a soma das tensões normais em um elemento submetido a um estado plano de tensões impede da orientação do mesmo.

As equações 3.11 e 3.12 são equações paramétricas de uma circunferência. Após manipulações algébricas (Beer & Jonhston, 1989) encontram-se as expressões:

$$(\sigma_{x'} - \sigma_{med})^2 + \tau_{x'y'}^2 = R^2, \quad (3.15)$$

onde:

$$\sigma_{\text{med}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, \quad (3.16)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \quad (3.17)$$

A equação 3.15 é a expressão de uma circunferência de raio R com centro em um ponto C , cujas coordenadas são $(\sigma_{\text{med}}, 0)$, conforme mostra a figura 3.6:

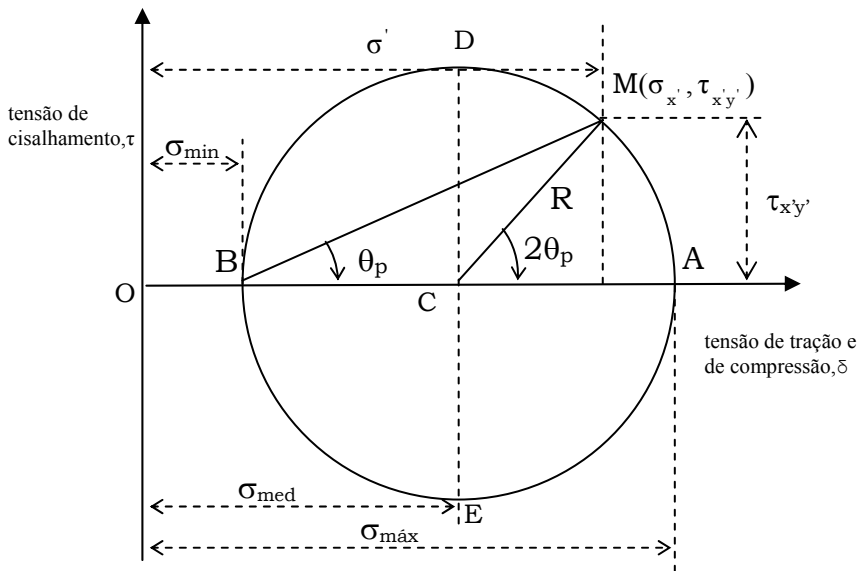


Figura 3.6 Círculo de Mohr

A figura 3.6 é conhecida como círculo de Mohr, e será motivo de estudo mais adiante. Desta figura destacam-se:

ponto A: máximo valor de tensão normal σ_{\max} ;

ponto B: mínimo valor de tensão normal σ_{\min} ;

pontos D e E: máximo valor da tensão de cisalhamento τ_{\max} ;

pontos D e E: correspondem a tensão média σ_{med} ;

raio R: equivalente ao valor máximo da tensão de cisalhamento;

ponto C: corresponde a σ_{med} .

Uma equação para o ângulo θ pode ser obtida a partir da equação 3.13 considerando os pontos A e B, fazendo $\tau_{x'y'} = 0$;

$$\tan 2\theta_p = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} . \quad (3.18)$$

A equação 3.18 define dois valores $2\theta_p$ com diferença de 180° ou dois valores θ_p com diferença de 90° . Qualquer um desses valores pode ser usado na determinação da orientação do cubo elementar correspondente

As tensões normais σ_{\max} e σ_{\min} são chamadas de tensões principais no ponto considerado. As faces do cubo elementar são os planos principais. A equação 3.18 permite afirmar que não existem tensões de cisalhamento nos planos principais, pois $\tau_{x'y'}$ é igual a zero.

Da figura 3.6, observa-se que:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\text{med}} + R, \quad (3.19)$$

e que:

$$\sigma_{\min} = \sigma_{\text{med}} - R, \quad (3.20)$$

Por analogia aos pontos A e B, o valor do ângulo θ_c com respeito ao alinhamento D E, é dado por:

$$\tan 2\theta_c = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}, \quad (3.21)$$

Os ângulos θ_p e θ_c são inversos negativos, logo, separados por 45° . Deste modo, os planos de máxima tensão de cisalhamento formam ângulos de 45° com os planos principais.

A tensão normal que corresponde a condição de tensão máxima de cisalhamento é σ' e é equivalente a σ_{med} .

Uma forma gráfica alternativa para problemas relacionados ao estado plano de tensões é conhecida como Circulo de Mohr. Esta solução gráfica foi sugerida por Otto Mohr (1835 – 1918) cujo formato é similar ao círculo mostrado na figura 3.6. Para a construção do círculo de Mohr, algumas convenções podem ser definidas a priori:

- a) Quando a tensão de cisalhamento provocar rotação do elemento no sentido horário, o ponto correspondente fica acima do eixo horizontal; caso contrário, o ponto fica abaixo.

b) Quando a tensão normal for positiva (tração), o ponto correspondente fica à direita do eixo vertical; caso contrário, o ponto fica à esquerda.

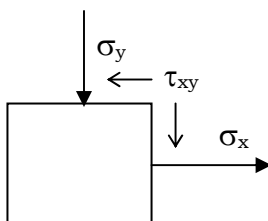
Exemplo.

Considere um cubo elementar sujeito a um estado de tensões. a) Construir o Círculo de Mohr; b) Determinar, graficamente: as tensões principais, a média, a tensão máxima de cisalhamento, as tensões normais correspondentes a de cisalhamento e representá-las graficamente nos planos onde ocorrem. São dados:

$$\sigma_x = 35 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = -20 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = 15 \text{ MPa}$$

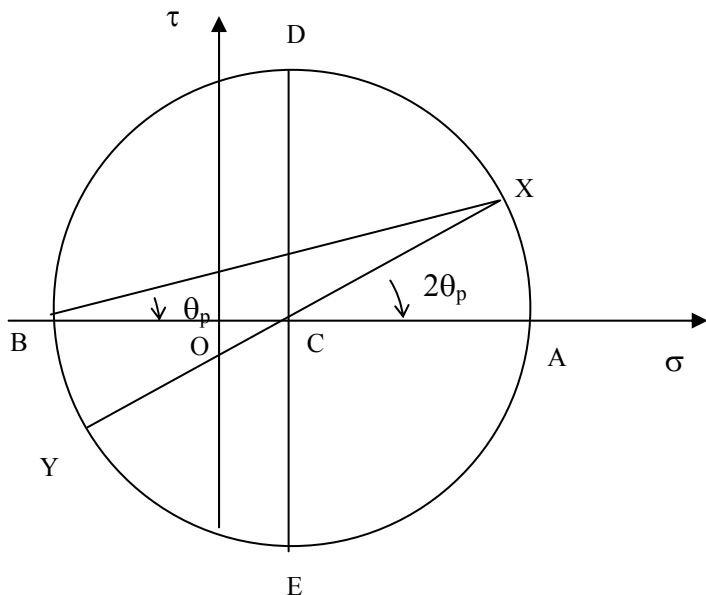


a) Círculo de Mohr

Escala: 1cm – 10 MPa

X (35 MPa, 15 MPa)

Y (20 MPa, -15 MPa)



Tensões principais e média:

$$OA = \sigma_{\max} \cong 39 \text{ MPa}$$

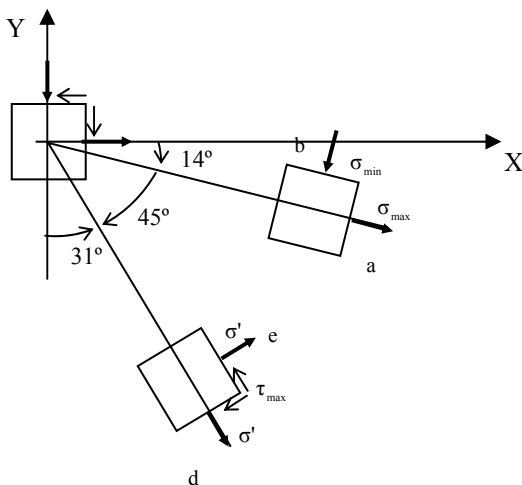
$$OB = \sigma_{\min} \cong 24 \text{ MPa}$$

$$OC = \sigma_{\text{med}} \cong 7,5 \text{ MPa}$$

Tensão máxima de cisalhamento e as tensões normais correspondentes:

$$CD = \tau_{\max} \cong 32 \text{ MPa}$$

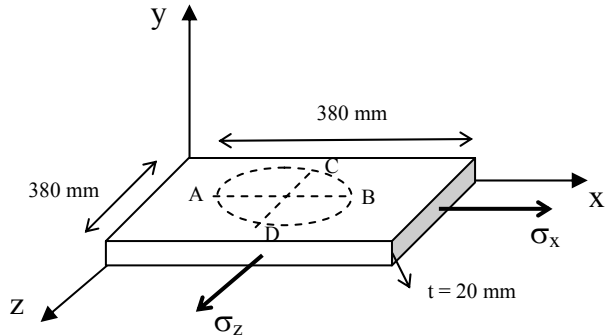
$$OC = \sigma' \cong 7,5 \text{ MPa}$$



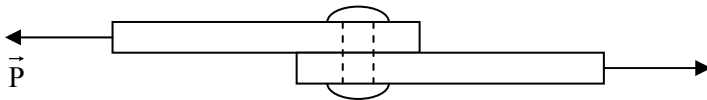
Exercícios Propostos

- 1) Espera-se que uma barra de alumínio se alongue de 2mm. Determinar o menor diâmetro e o menor comprimento que devem ser adotados para a barra, quando a tração for 2200N.
Dados: $\sigma_{adm} = 150\text{MPa}$ e $E = 70\text{GPa}$.
- 2) Considere uma barra de alumínio sob a qual é aplicada uma tração de 1000N. Determinar o diâmetro mínimo da barra de modo que satisfaça as condições de segurança para que os objetivos da estrutura sejam atendidos; sua deformação longitudinal não poderá ultrapassar a 5mm. Dados: $\sigma = 25\text{MPa}$, $E = 70\text{GPa}$
- 3) Uma esfera de aço de 2,5 m de diâmetro está sujeita a uma pressão hidrostática de $700 \times 10^3 \text{ kN}$. Determinar a variação volumétrica. Dados: $E = 200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$, $\nu = 0,29$
- 4) Um círculo de diâmetro $d = 230\text{mm}$ é desenhado em uma chapa de alumínio sem tensões, de espessura $t = 20\text{mm}$. Aplicam-se tensões normais de $\sigma_x = 84\text{MPa}$ e $\sigma_z = 140\text{MPa}$;

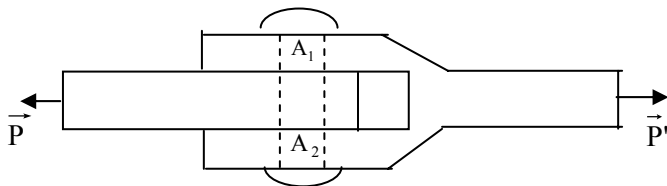
adotando-se $\nu = 1/3$ e $E = 70\text{GPa}$, determinar as deformações que ocorrem: a) No comprimento do diâmetro AB; b) No comprimento do diâmetro CD; c) Na espessura da chapa; d) No volume da chapa.



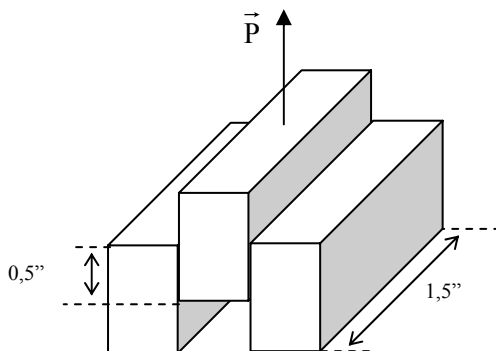
- 5) Calcular o diâmetro mínimo do rebite de aço SAE-1015 que deve suportar, com um coeficiente de segurança 4, uma força de 1.000kgf. Dados : $\sigma_u = 29\text{kgf/mm}^2$.



- 6) Considere o pino de 12,5 mm de diâmetro, da junta da figura abaixo. A força P é igual a 3750 kgf. Admitindo a distribuição uniforme das tensões de cisalhamento, qual o valor dessas tensões nas seções A_1 e A_2 .

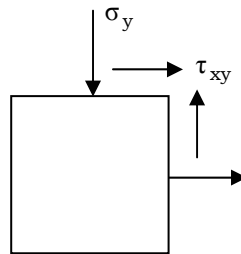


- 7) Dimensionar o pino de articulação esquemático na figura do exercício 6, sendo ele composto de aço SAE-1040 ($\sigma_u = 43 \text{ kgf/mm}^2$). A carga atuante é de 1000 kgf e o coeficiente de segurança é igual a 4.
- 8) O dispositivo da figura seguinte é empregado para determinar a resistência ao cisalhamento de uma junta soldada. Se a carga P , no instante de ruptura, é de 1250 kgf , qual a tensão de cisalhamento, na junta, por ocasião da ruptura?

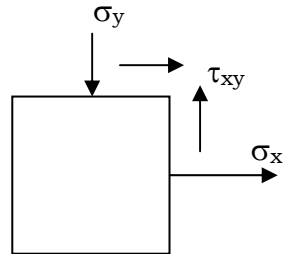


- 9) Considere um cubo elementar sujeito a um estado de tensões.
- Construir o Círculo de Mohr;
 - Determinar graficamente: as tensões principais, a média, a tensão máxima de cisalhamento, as tensões normais correspondentes a de cisalhamento e representá-las graficamente nos planos onde ocorrem. São dados:

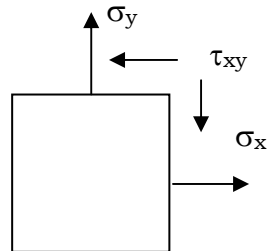
- a) $\sigma_x = 50 \text{ MPa}$
 $\sigma_y = 10 \text{ MPa}$
 $\tau_{xy} = 40 \text{ MPa}$



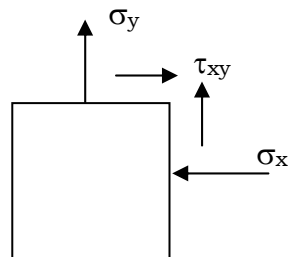
- b) $\sigma_x = 50 \text{ MPa}$
 $\sigma_y = 20 \text{ MPa}$
 $\tau_{xy} = 40 \text{ MPa}$



- c) $\sigma_x = 100 \text{ MPa}$
 $\sigma_y = 60 \text{ MPa}$
 $\tau_{xy} = 48 \text{ MPa}$



- d) $\sigma_x = 1200 \text{ kgf/cm}^2$
 $\sigma_y = 1500 \text{ kgf/cm}^2$
 $\tau_{xy} = 800 \text{ kgf/cm}^2$



Respostas dos Exercícios Propostos

- 1- 4,4 mm; 0.95 m.
- 2- 7,2 mm.
- 3- $-0,036 \text{ m}^3$.
- 4- 0,1227 mm; 0,368 mm; $-0,02134 \text{ mm}$; 3081 mm^3 .
- 5- 13,25 mm.
- 6- $15,28 \text{ kgf/mm}^2$.
- 7- 7,7 mm.
- 8- $129,2 \text{ kgf/cm}^2$.
- 9- a- 70 MPa; 30 MPa; 20 MPa; 50 MPa; 20 MPa.
b- 68 MPa; 38 MPa; 15 MPa; 53 MPa; 15 MPa.

c- 132 MPa; 28 MPa; 80 MPa; 52 MPa; 80 MPa.
d- 1720 Kgf/cm^2 ; 1440 Kgf/cm^2 ; 160 Kgf/cm^2 ; 1560 Kgf/cm^2 ; 160 Kgf/cm^2 .