UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS DA TERRA
DEPARTAMENTO DE GEOMÁTICA

AJUSTAMENTO de OBSERVAÇÕES – GA751

Prof. Alvaro Muriel Lima Machado

1

Ajustamento de Observações

Quando as medidas não são feitas diretamente sobre as grandezas procuradas, mas sim sobre outras relacionadas matematicamente...

Método paramétrico ➔ $L_a = F(X_a)$
Os valores observados ajustados podem ser expressos explicitamente como uma função dos parâmetros ajustados.

Método dos correlatos ➔ $F(L_a) = 0$
Os valores observados ajustados devem satisfazer determinadas condições (erro de fechamento = zero).

Método combinado ➔ $F(X_a, L_a) = 0$
Os valores observados ajustados e os parâmetros ajustados são ligados por função não explícita (não se consegue separá-los).

2

Ajustamento: Método Combinado

$F(X_a, L_a) = 0$ ➔ Modelo mais genérico que os dois anteriores

onde $X_a = X_0 + X$ $\quad L_a = L_b + V$

Fazendo-se a linearização do modelo, tem-se:

$$A = \left.\frac{\partial F}{\partial X_a}\right|_{X_0} \qquad B = \left.\frac{\partial F}{\partial L_a}\right|_{L_b} \qquad W = F(X_0, L_b)$$

Resultando:

$$F(X_a, L_a) = F(X_0 + X, L_b + V) = 0$$

$$F(X_a, L_a) \approx F(X_0, L_b) + \left.\frac{\partial F}{\partial X_a}\right|_{X_0} (X_a - X_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial L_a}\right|_{L_b} (L_a - L_b)$$

$$F(X_a, L_a) \approx AX + BV + W = 0$$

3

Ajustamento: Método Combinado

n ➔ valores observados
u ➔ parâmetros
r ➔ equações

Graus de liberdade = r - u

sendo necessário que n > r - u

Observações > Graus de liberdade

ou r < n+u

Equações

$${}_rA_{u\,u}X_1 + {}_rB_{n\,n}V_1 + {}_rW_1 = {}_r0_1$$

Parâmetros Observações Erros de fechamento

4

Ajustamento: Método Combinado

Equações Normais

$$\phi = V^T PV - 2K^T (AX + BV + W) = mínimo$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial V} = 2PV - 2B^T K \quad ➔ \quad PV - B^T K = 0$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial K} = -2(AX + BV + W) \quad ➔ \quad AX + BV + W = 0$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial X} = -2A^T K \quad ➔ \quad A^T K = 0$$

5

Ajustamento: Método Combinado

Equações Normais

Dimensões

observações
equações
parâmetros

$$\begin{array}{c} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{r} \\ \mathbf{u} \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathbf{n} & \mathbf{r} & \mathbf{u} \end{array} \\ \begin{bmatrix} P & -B^T & 0 \\ B & 0 & A \\ 0 & A^T & 0 \end{bmatrix} \end{array}
\begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \begin{bmatrix} V \\ K \\ X \end{bmatrix} \end{array}
+ \begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ W \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}
= \begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Observações:

1) Método dos correlatos ➔ A = 0 (Não existem parâmetros)
2) Método paramétrico
   $W = F(X_0,L_b)=L_0-L_b = L$
   Cada equação ➔ uma observação ➔ B = -I
   ➔ AX+L = V

6

Ajustamento: Método Combinado

Resolução das Equações Normais

$$\begin{bmatrix} P & -B^T & 0 \\ B & 0 & A \\ 0 & A^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ K \\ X \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ W \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matriz com dimensões elevadas

$$\begin{bmatrix} V \\ K \\ X \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} P & -B^T & 0 \\ B & 0 & A \\ 0 & A^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ W \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tempo consumido na inversão de uma matriz é proporcional ao cubo de sua dimensão.

7

Ajustamento: Método Combinado

Sequência de Resolução de Ajustamento: Método Combinado

1) Matrizes/vetores conhecidos ➔ Lb, Xo, P
2) Cálculos preliminares de matrizes ➔ W, A, B
3) Resolução das Equações Normais

$$M = BP^{-1}B^T$$

$$X = -(A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} W$$

$$X_a = X_0 + X$$

Após diversas iterações...

$$K = -M^{-1}(AX + W)$$ (Vetor dos Lagrangianos)

$$V = P^{-1}B^T K$$

$$L_a = L_b + V$$

8

Ajustamento: Método Combinado

Variância da Observação de Peso Unitário (a posteriori)

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T PV}{S} = \frac{V^T PV}{r - u}$$

Matriz Variância-Covariância dos Parâmetros

$$\Sigma_X = \Sigma_{X_a} = \hat{\sigma}_0^2 (A^T M^{-1} A)^{-1}$$

Matriz Variância-Covariância dos Valores Observados Ajustados

$$\Sigma_{L_a} = \hat{\sigma}_0^2 [P^{-1} + P^{-1}B^T M^{-1} A (A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} B P^{-1} - P^{-1} B^T M^{-1} B P^{-1}]$$

Matriz Variância-Covariância dos Resíduos

$$\Sigma_V = \hat{\sigma}_0^2 P^{-1} - \Sigma_{L_a}$$

Matriz Variância-Covariância do Erro de Fechamento

$$\Sigma_W = \hat{\sigma}_0^2 M$$

9

Ajustamento: Método Combinado

Dadas as coordenadas observadas de quatro pontos, estimar as coordenadas do centro e o raio da circunferência que melhor se ajusta aos mesmos.

Pontos	x	σ_x^2	y	σ_y^2
1	140,0	0,5	60,0	0,5
2	165,0	1,0	100,0	1,0
3	165,0	0,5	150,0	0,5
4	140,0	1,0	180,0	1,0

a) Modelo matemático

Sejam

x_a, y_a → coordenadas do centro ajustadas

r_a → raio ajustado

$x_i^{(a)}, y_i^{(a)}$ → valores observados ajustados

10

Ajustamento: Método Combinado

b) Modelo linearizado

AX + BV + W = 0

c) Vetor Solução Inicial

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_o \\ y_0 \\ r_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 120 \\ 70 \end{bmatrix}$$

d) Vetor dos valores observados

$$L_b = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ x_4 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

11

Ajustamento: Método Combinado

e) Matriz dos Pesos P

$$P = \left(\Sigma_{L_b}\right)^{-1}$$

12

Ajustamento: Método Combinado

f) Vetor Erro de Fechamento $W = F(L_b, X_0)$

$$w_i = (x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 - r_0^2$$

g) Matriz B

$$B = \left.\frac{\partial F}{\partial L_a}\right|_{L_b}$$

8 observações

$$B = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

4 equações

13

Ajustamento: Método Combinado

g) Matriz B

14

Ajustamento: Método Combinado

h) Matriz A $A = \left.\frac{\partial F}{\partial X_a}\right|_{X_0}$

15

Ajustamento: Método Combinado

i) Cálculo da Matriz M $M = BP^{-1}B^T$

j) Cálculo do Vetor de Correções X

$$X = -(A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} W$$

16

Ajustamento: Método Combinado

k) Cálculo do vetor de parâmetros corrigido $X_a = X_0 + X$

17

Ajustamento: Método Combinado

18

Ajustamento: Método Combinado

Ajustamento: Método Combinado

Para obter o vetor de resíduos tem-se que calcular o vetor dos lagrangianos:

$$K = -M^{-1}(AX + W)$$

$$V = P^{-1}B^{T}K$$

Ajustamento: Método Combinado

Vetor das observações ajustadas $L_a = L_b + V$

Ajustamento: Método Combinado

Variância a posteriori $\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T PV}{\nu} = \frac{V^T PV}{4-3}$

MVC dos parâmetros

$$\Sigma_{X_a} = \hat{\sigma}_0^2 (A^T M^{-1} A)^{-1}$$

$$X_a = \begin{bmatrix} x_o \\ y_0 \\ r_0 \end{bmatrix}$$

22

Ajustamento: Método Combinado

Uma reta deve ser ajustada a três pontos . As seguintes observações foram efetuadas.

Ponto	x (cm)	σ² (cm²)	y (cm)	σ² (cm²)
1	2,00	0,04	3,20	0,10
2	4,00	0,04	4,00	0,08
3	6,00	0,04	5,00	0,08

Modelo matemático ➔ $y - ax - b = 0$

23

Ajustamento: Método Combinado

1) Matrizes/vetores conhecidos ➔ Lb, Xo, P

$$L_b = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Xo: Toma-se, por exemplo, as duas primeiras equações...

$$3{,}20 = 2{,}00a + b \qquad PX = Q$$
$$4{,}00 = 4{,}00a + b \qquad X = P^{-1}Q \qquad X_0 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

24

Ajustamento: Método Combinado

2) Cálculos preliminares de matrizes ➔ W, A, B

$$W = \begin{bmatrix} y_1 - ax_1 - b \\ y_2 - ax_2 - b \\ y_3 - ax_3 - b \end{bmatrix}_{X_0}$$

Ajustamento: Método Combinado

3) Resolução das Equações Normais

$$M = BP^{-1}B^T$$

$$X = -(A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} W$$

$$X_a = X_0 + X$$

Ajustamento: Método Combinado

4) Iterações

Ajustamento: Método Combinado

Ajustamento: Método Combinado

Para obter o vetor de resíduos tem-se que calcular o vetor dos lagrangianos:

$$K = -M^{-1}(AX + W)$$

$$V = P^{-1}B^{T}K$$

Ajustamento: Método Combinado

Vetor das observações ajustadas $L_a = L_b + V$

Ajustamento: Método Combinado

Estimativa da precisão

Variância da Observação de Peso Unitário (a posteriori)

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T PV}{S} = \frac{V^T PV}{r-u}$$

Matriz Variância-Covariância dos Valores Observados Ajustados

$$\Sigma_{L_a} = \hat{\sigma}_0^2 [P^{-1} + P^{-1}B^T M^{-1} A(A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} BP^{-1} - P^{-1}B^T M^{-1} BP^{-1}]$$

31

Ajustamento: Método Combinado

Estimativa da precisão

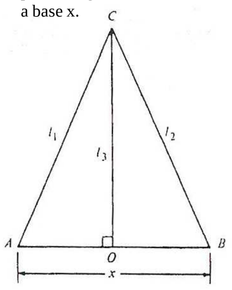
Matriz Variância-Covariância dos Parâmetros

$$\Sigma_X = \Sigma_{X_a} = \hat{\sigma}_0^2 (A^T M^{-1} A)^{-1}$$

32

Ajustamento: Método Combinado

De um triângulo isósceles mediu-se os dois lados e a altura. As observações foram, l_1 = 1000,00m; l_2 = 1000,10m; l_3 = 800,25m. As observações têm precisão igual e não são correlacionadas. Determinar a estimativa MMQ para a base x.



33

Ajustamento: Método Combinado

1) Matrizes/vetores conhecidos ➔ Lb, Xo, P

Xo: $X_0 = [x] \quad = [1200{,}00]$

Toma-se, por exemplo, a primeira equação...

$l_1^2 - l_3^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 0 \qquad x = 2\sqrt{1000{,}00^2 - 800{,}25^2}$

34

Ajustamento: Método Combinado

2) Cálculos preliminares de matrizes ➔ W, A, B

$$W = \left[\begin{matrix} l_1^2 - l_3^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \\ l_2^2 - l_3^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \end{matrix}\right]_{X_0}$$

35

Ajustamento: Método Combinado

3) Resolução das Equações Normais

$$M = BP^{-1}B^T$$

$$X = -(A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} W$$

$$X_a = X_0 + X$$

36

Ajustamento: Método Combinado

4) Iterações

Ajustamento: Método Combinado

Ajustamento: Método Combinado

Para obter o vetor de resíduos tem-se que calcular o vetor dos lagrangianos:

$$K = -M^{-1}(AX + W)$$

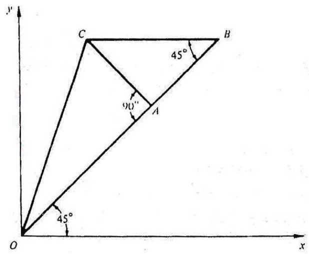
$$V = P^{-1}B^{T}K$$

Ajustamento: Método Combinado

Vetor das observações ajustadas $$L_a = L_b + V$$

Ajustamento: Método Combinado

Na figura abaixo, as distâncias OA, AB, BC, e CO foram observadas, conforme tabela anexa, com MVC conhecida. Os ângulos mostrados na figura são assumidos constantes. Estimar as coordenadas de C por MMQ.



Segmentos	Medidas (m)
AO = l_1	1000,20
AB = l_2	500,55
BC = l_3	707,75
CO = l_4	1118,60

$$\Sigma_{L_b} = \begin{bmatrix} 200 & 100 & 0 & 0 \\ 100 & 200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 50 \\ 0 & 0 & 50 & 100 \end{bmatrix} cm^2$$

Ajustamento: Método Combinado

Modelo matemático

$$\begin{cases} X_C = l_1 \sin(45^\circ) + l_2 \sin(45^\circ) - l_3 \\ Y_C = l_1 \cos(45^\circ) + l_2 \cos(45^\circ) \\ X_C^2 + Y_C^2 = l_4^2 \end{cases}$$

$F(X_a, L_a) = 0$ ➔ $$\begin{cases} X_C - l_1 \sin(45^\circ) - l_2 \sin(45^\circ) + l_3 = 0 \\ Y_C - l_1 \cos(45^\circ) - l_2 \cos(45^\circ) = 0 \\ X_C^2 + Y_C^2 - l_4^2 = 0 \end{cases}$$

Ajustamento: Método Combinado

1) Matrizes/vetores conhecidos → Lb, Xo, P

$$X_0 = \begin{bmatrix} X_C \\ Y_C \end{bmatrix}$$

Toma-se, por exemplo, as duas primeiras equações...

$$X_C = (l_1 + l_2)\sin(45^\circ) - l_3$$
$$Y_C = (l_1 + l_2)\cos(45^\circ)$$

43

Ajustamento: Método Combinado

2) Cálculos preliminares de matrizes → W, A, B

44

Ajustamento: Método Combinado

3) Resolução das Equações Normais

$$M = BP^{-1}B^T$$

$$X = -(A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} W$$

$$X_a = X_0 + X$$

45

Ajustamento: Método Combinado

4) Iterações

Ajustamento: Método Combinado

Ajustamento: Método Combinado

Para obter o vetor de resíduos tem-se que calcular o vetor dos lagrangianos:

$$K = -M^{-1}(AX + W)$$

$$V = P^{-1}B^{T}K$$

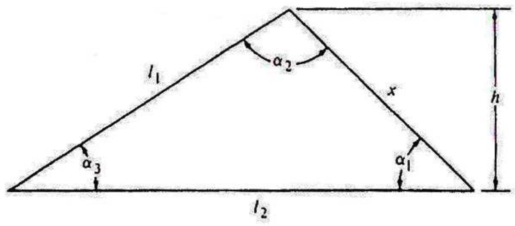
Ajustamento: Método Combinado

Vetor das observações ajustadas $L_a = L_b + V$

49

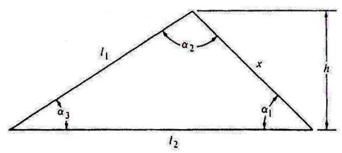
Ajustamento: Método Combinado

Com referência ao triângulo abaixo, α_1 = 40°00’00”, α_2 = 95°00’00”, α_3 = 45°00’30”, l_1 = 1000,00m e l_2 = 1550,00m. As observações não são correlacionadas, o desvio padrão de cada ângulo observado é 15”, e o desvio padrão de cada lado observado é 0,10m.
Estimar ***x*** e ***h*** via ajustamento por MMQ. Calcule também a MVC.



50

Ajustamento: Método Combinado



Quantos graus de liberdade apresentam as nossas observações?

Quantos ângulos definem o formato de um triângulo?

Quantos lados são necessários para se definir a escala?

Segue-se que existem 2 graus de liberdade.

51

Ajustamento: Método Combinado

Modelo matemático

$F(X_a, L_a) = 0$ ➔

Ajustamento: Método Combinado

1) Matrizes/vetores conhecidos ➔ Lb, Xo, P

$$X_0 = \begin{bmatrix} x \\ h \end{bmatrix}$$

Ajustamento: Método Combinado

1) Matrizes/vetores conhecidos ➔ Lb, Xo, P

Ajustamento: Método Combinado

2) Cálculos preliminares de matrizes ➔ W, A, B

Ajustamento: Método Combinado

2) Cálculos preliminares de matrizes ➔ W, A, B

Ajustamento: Método Combinado

3) Resolução das Equações Normais

$$M = BP^{-1}B^{T}$$

$$X = -(A^{T}M^{-1}A)^{-1}A^{T}M^{-1}W$$

$$X_a = X_0 + X$$

4) Iterações

Ajustamento: Método Combinado

No FreeMat...

Ajustamento: Método Combinado

Ajustamento: Método Combinado

Para obter o vetor de resíduos tem-se que calcular o vetor dos lagrangianos:

$$K = -M^{-1}(AX + W)$$

$$V = P^{-1}B^{T}K$$

Ajustamento: Método Combinado

Vetor das observações ajustadas $L_a = L_b + V$

Ajustamento: Método Combinado

Estimativa da precisão

Variância da Observação de Peso Unitário (a posteriori)

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T PV}{S} = \frac{V^T PV}{r-u}$$

Matriz Variância-Covariância dos Valores Observados Ajustados

$$\Sigma_{L_a} = \hat{\sigma}_0^2[P^{-1} + P^{-1}B^T M^{-1}A(A^T M^{-1}A)^{-1}A^T M^{-1}BP^{-1} - P^{-1}B^T M^{-1}BP^{-1}]$$

Ajustamento: Método Combinado

Estimativa da precisão

Matriz Variância-Covariância dos Parâmetros

$$\Sigma_X = \Sigma_{X_a} = \hat{\sigma}_0^2(A^T M^{-1}A)^{-1}$$

Ajustamento: Método Combinado

Dois sistemas de coordenadas retangulares, A e B, estão relacionados através de translação e rotação. Para o caso bidimensional de transformação do sistema A para o B, aplicam-se as seguintes expressões:

$$x_B = a_1 + a_2 x_A - a_3 y_A$$

$$y_B = a_4 + a_3 x_A + a_2 y_A$$

Cinco pontos foram medidos (sem correlação; precisão igual) em cada sistema de coordenadas:

n = 20 (observações)
u = 4 (parâmetros)
r = 10 (equações)

Graus de liberdade = r – u = 6

Ponto	x_A	y_A	x_B	y_B
1	2,020	4,107	8,457	16,740
2	5,132	1,098	12,472	15,292
3	0,080	6,204	5,863	17,865
4	7,483	0,109	15,155	15,367
5	4,206	8,128	8,818	21,333

Ajustamento: Método Combinado

Modelo matemático

$$F(X_a, L_a) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_{B_1} - a_1 - a_2 x_{A_1} + a_3 y_{A_1} = 0 \\ y_{B_1} - a_4 - a_3 x_{A_1} - a_2 y_{A_1} = 0 \\ x_{B_2} - a_1 - a_2 x_{A_2} + a_3 y_{A_2} = 0 \\ y_{B_2} - a_4 - a_3 x_{A_2} - a_2 y_{A_2} = 0 \\ x_{B_3} - a_1 - a_2 x_{A_3} + a_3 y_{A_3} = 0 \\ y_{B_3} - a_4 - a_3 x_{A_3} - a_2 y_{A_3} = 0 \\ x_{B_4} - a_1 - a_2 x_{A_4} + a_3 y_{A_4} = 0 \\ y_{B_4} - a_4 - a_3 x_{A_4} - a_2 y_{A_4} = 0 \\ x_{B_5} - a_1 - a_2 x_{A_5} + a_3 y_{A_5} = 0 \\ y_{B_5} - a_4 - a_3 x_{A_5} - a_2 y_{A_5} = 0 \end{cases}$$

Ajustamento: Método Combinado

1) Matrizes/vetores conhecidos ➔ Lb, Xo, P

$$L_b = \begin{bmatrix} x_{A_1} & y_{A_1} & x_{B_1} & y_{B_1} & x_{A_2} & \cdots \end{bmatrix}^T$$

$$P = I$$

Resolvendo-se um sistema de equações, usando-se os dois primeiros pontos:

$$\begin{cases} a_1 + 2{,}020 a_2 - 4{,}107 a_3 = 8{,}457 \\ 4{,}107 a_2 + 2{,}020 a_3 + a_4 = 16{,}740 \\ a_1 + 5{,}132 a_2 - 1{,}098 a_3 = 12{,}472 \\ 1{,}098 a_2 + 5{,}132 a_3 + a_4 = 15{,}292 \end{cases} \qquad X_0 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8{,}3006 \\ 0{,}8993 \\ 0{,}4042 \\ 12{,}2300 \end{bmatrix}$$

Ajustamento: Método Combinado

2) Cálculos preliminares de matrizes ➔ W, A, B

$$W = \begin{bmatrix} 0{,}0000 \\ -0{,}0000 \\ 0{,}0000 \\ -0{,}0000 \\ -0{,}0017 \\ 0{,}0234 \\ 0{,}1689 \\ 0{,}0140 \\ 0{,}0206 \\ 0{,}0932 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} -1 & -x_{A_1} & y_{A_1} & 0 \\ 0 & -y_{A_1} & -x_{A_1} & -1 \\ -1 & -x_{A_2} & y_{A_2} & 0 \\ 0 & -y_{A_2} & -x_{A_2} & -1 \\ -1 & -x_{A_3} & y_{A_3} & 0 \\ 0 & -y_{A_3} & -x_{A_3} & -1 \\ -1 & -x_{A_4} & y_{A_4} & 0 \\ 0 & -y_{A_4} & -x_{A_4} & -1 \\ -1 & -x_{A_5} & y_{A_5} & 0 \\ 0 & -y_{A_5} & -x_{A_5} & -1 \end{bmatrix}$$

67

Ajustamento: Método Combinado

2) Cálculos preliminares de matrizes ➔ W, A, B

$$B = \begin{bmatrix} \begin{matrix} -a_2 & a_3 & 1 & 0 \\ -a_3 & -a_2 & 0 & 1 \end{matrix} & & & & \\ & \begin{matrix} -a_2 & a_3 & 1 & 0 \\ -a_3 & -a_2 & 0 & 1 \end{matrix} & & \mathbf{0} & \\ & & \begin{matrix} -a_2 & a_3 & 1 & 0 \\ -a_3 & -a_2 & 0 & 1 \end{matrix} & & \\ & \mathbf{0} & & \begin{matrix} -a_2 & a_3 & 1 & 0 \\ -a_3 & -a_2 & 0 & 1 \end{matrix} & \\ & & & & \begin{matrix} -a_2 & a_3 & 1 & 0 \\ -a_3 & -a_2 & 0 & 1 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

68

Ajustamento: Método Combinado

3) Resolução das Equações Normais

$$M = BP^{-1}B^T$$

$$X = -(A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} W$$

$$X_a = X_0 + X$$

69

Ajustamento: Método Combinado

No FreeMat...

70

Ajustamento: Método Combinado

71

Ajustamento: Método Combinado

72

Ajustamento: Método Combinado

A equação do plano é usualmente dada por $ax + by + cz + d = 0$.
Sabe-se também que três pontos determinam um plano. Logo, três parâmetros são suficientes para a equação acima.
Segue-se que a equação pode ser reescrita como $ax + by + cz + 1 = 0$.

Dadas as coordenadas tridimensionais de quatro pontos pertencentes a um plano, determinar os parâmetros *a*, *b* e *c* por MMQ. Use a aproximação $a = 1$; $b = 1$, e $c = -1$.

Ponto	X	Y	Z
1	1,1	-1,0	0,9
2	-2,0	2,0	1,0
3	2,0	-2,0	1,0
4	-1,1	1,0	0,9

n = 12 (observações)
u = 3 (parâmetros)
r = 4 (equações)

Ajustamento: Método Combinado

Modelo matemático

$$F(X_a, L_a) = 0 \rightarrow \begin{cases} ax_1 + by_1 + cz_1 + 1 = 0 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 + 1 = 0 \\ ax_3 + by_3 + cz_3 + 1 = 0 \\ ax_4 + by_4 + cz_4 + 1 = 0 \end{cases}$$

Ajustamento: Método Combinado

1) Matrizes/vetores conhecidos → Lb, Xo, P

$$L_b = \begin{bmatrix} 1{,}1 \\ -1{,}0 \\ 0{,}9 \\ -2{,}0 \\ 2{,}0 \\ 1{,}0 \\ 2{,}0 \\ -2{,}0 \\ 1{,}0 \\ -1{,}1 \\ 1{,}0 \\ 0{,}9 \end{bmatrix}$$

$$P = I$$

$$X_0 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ajustamento: Método Combinado

2) Cálculos preliminares de matrizes ➔ W, A, B

Ajustamento: Método Combinado

2) Cálculos preliminares de matrizes ➔ W, A, B

Ajustamento: Método Combinado

3) Resolução das Equações Normais

$$M = BP^{-1}B^T$$

$$X = -(A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} W$$

$$X_a = X_0 + X$$

Primeira iteração ➔

Ajustamento: Método Combinado

No FreeMat...

Lb = [1.1;-1.0;0.9;-2.0;2.0;1.0;2.0;-2.0;1.0;-1.1;1.0;0.9];

P = eye(12);

Xo = [1;1;-1];

79

Ajustamento: Método Combinado

80

Ajustamento: Método Combinado

Ajustar a parábola $y^2 = ax$ a dois pontos dados (1;2) e (2;3).

Modelo matemático

$F(X_a, L_a) = 0 \rightarrow \begin{cases} y_1^2 - ax_1 = 0 \\ y_2^2 - ax_2 = 0 \end{cases}$

n = 4 (observações)
u = 1 (parâmetros)
r = 2 (equações)

81

Ajustamento: Método Combinado

1) Matrizes/vetores conhecidos ➔ Lb, Xo, P

$$L_b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$P = I$$

X_o pode ser calculado a partir de qualquer uma das duas equações. Seja, por exemplo, a primeira equação:

$$X_0 = \left[y_1^2 / x_1 \right] = [4{,}0]$$

82

Ajustamento: Método Combinado

2) Cálculos preliminares de matrizes ➔ W, A, B

83

Ajustamento: Método Combinado

3) Resolução das Equações Normais

$$M = BP^{-1}B^T$$
$$X = -(A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} W$$

$$X_a = X_0 + X$$

Primeira iteração ➔ ➔

Segunda iteração ➔ ➔

84

Ajustamento: Método Combinado

No FreeMat...

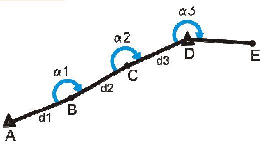
Ajustamento: Método Combinado

Dada a poligonal enquadrada da figura abaixo, os pontos A e D são estações horizontais de controle com coordenadas X, Y conhecidas. Os pontos B e E são marcos de azimute para as estações A e D, respectivamente. Ajustar as coordenadas horizontais das estações B e C, dadas as observações seguintes.

Ângulo	σ	Distância (m)	σ (m)
$\alpha_1 = 172°53'34''$	2"	d1=281,832	0,016
$\alpha_2 = 185°22'14''$	2"	d2=271,300	0,016
$\alpha_3 = 208°26'19''$	2"	d3=274,100	0,016

Pontos	X (m)	Y (m)
A	8478,139	2483,826
D	9229,145	2828,963

Direções	Azimutes
AB	68°15'20,7"
DE	94°57'13,5"



Ajustamento: Método Combinado

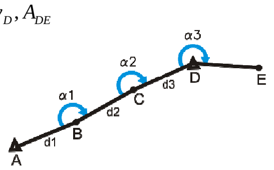
Parâmetros ➔ x_B, y_B, x_C, y_C

Observações mínimas ➔ α_1, d_1, d_2

Informações redundantes ➔ x_D, y_D, A_{DE}

Graus de liberdade = r – u = 3

n = 6 (observações)
u = 4 (parâmetros)
r = 7 (equações)



Azimutes

$$A_{BC} = A_{AB} + \alpha_1 - \pi$$
$$A_{CD} = A_{BC} + \alpha_2 - \pi \quad = (A_{AB} + \alpha_1 - \pi) + \alpha_2 - \pi$$
$$A_{DE} = A_{CD} + \alpha_3 - \pi \quad = ((A_{AB} + \alpha_1 - \pi) + \alpha_2 - \pi) + \alpha_3 - \pi$$

Ajustamento: Método Combinado

Modelo matemático

$$\begin{cases} x_B = x_A + \overline{AB} * sen(A_{AB}) \\ y_B = y_A + \overline{AB} * \cos(A_{AB}) \\ x_C = x_B + \overline{BC} * sen(A_{BC}) \\ y_C = y_B + \overline{BC} * \cos(A_{BC}) \\ x_D = x_C + \overline{CD} * sen(A_{CD}) \\ y_D = y_C + \overline{CD} * \cos(A_{CD}) \\ A_{BC} = A_{AB} + \alpha_1 - \pi \\ A_{CD} = A_{BC} + \alpha_2 - \pi \\ A_{DE} = A_{CD} + \alpha_3 - \pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_B - x_A - \overline{AB} * sen(A_{AB}) = 0 \\ y_B - y_A - \overline{AB} * \cos(A_{AB}) = 0 \\ x_C - x_B - \overline{BC} * sen(A_{BC}) = 0 \\ y_C - y_B - \overline{BC} * \cos(A_{BC}) = 0 \\ x_D - x_C - \overline{CD} * sen(A_{CD}) = 0 \\ y_D - y_C - \overline{CD} * \cos(A_{CD}) = 0 \\ A_{BC} - A_{AB} - \alpha_1 + \pi = 0 \\ A_{CD} - A_{BC} - \alpha_2 + \pi = 0 \\ A_{DE} - A_{CD} - \alpha_3 + \pi = 0 \end{cases}$$

Ajustamento: Método Combinado

Verificação das observações: Cálculo de x_D, y_D, A_{DE}

Ajustamento: Método Combinado

1) Matrizes/vetores conhecidos ➔ Lb, Xo, P

Ajustamento: Método Combinado

1) Matrizes/vetores conhecidos ➔ Lb, Xo, P

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ x_C \\ y_C \\ A_{BC} \\ A_{CD} \end{bmatrix}$$

91

Ajustamento: Método Combinado

1) Matrizes/vetores conhecidos ➔ Lb, Xo, P

92

Ajustamento: Método Combinado

2) Cálculos preliminares de matrizes ➔ W, A, B

93

Ajustamento: Método Combinado

2) Cálculos preliminares de matrizes ➔ W, A, B

94

Ajustamento: Método Combinado

2) Cálculos preliminares de matrizes ➔ W, A, B

95

Ajustamento: Método Combinado

3) Resolução das Equações Normais

$$M = BP^{-1}B^{T}$$

$$X = -(A^{T}M^{-1}A)^{-1}A^{T}M^{-1}W \qquad = [\ ]$$

$$X_a = X_0 + X \qquad = [\ ]$$

Primeira iteração ➔ $X = [\ ]*10^{-14}$

96

Ajustamento: Método Combinado

No FreeMat...

97

Ajustamento: Método Combinado

98

Ajustamento: Método Combinado

99