UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS DA TERRA
DEPARTAMENTO DE GEOMÁTICA

AJUSTAMENTO de OBSERVAÇÕES – GA751

Prof. Alvaro Muriel Lima Machado

1

Ajustamento com Injunções

Linha com zeros na matriz A — Linha com zeros na matriz B

Só observações → Equações de condição X Sem observações → equações de injunção

condições X injunções

parameter constraints

Em alguns casos, a matriz N é singular (rank(N) < u).

Deficiência = s = u – rank(N)

Para se resolver o ajustamento deve-se acrescentar mais equações.

2

Ajustamento Paramétrico com Injunções

O modelo matemático para injunções ponderadas é $G(X_a) = 0$

ou em sua forma linearizada $CX + W' = 0$

A função a ser minimizada assume a forma:

$$\phi = V^T P V + V' P' V' - 2K^T (AX + L - V) - 2K'^T (CX + W')$$

Derivando e igualando a primeira derivada a zero, resulta:

$$X = -(A^T P A + C^T P_C C)^{-1} (A^T P L + C^T P_C \varepsilon_C)$$

ou

$$X = -(N + N_C)^{-1} (U + U_C)$$

$\varepsilon_C = W'$ = calculado - observado

3

Ajustamento com Injunções

Algumas injunções frequentemente empregadas:

a) Posição

b) Distância

c) Altura

d) Direção

e) Posição relativa

Ajustamento Paramétrico com Injunções

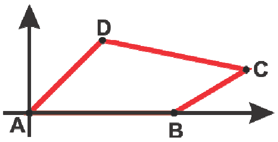
Dado um polígono ABCD com coordenadas conhecidas e isentas de erro no referencial X_1X_2, aplicou-se a transformação dada por:

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 - bx_2 + c \\ y_2 = bx_1 + ax_2 + d \end{cases}$$

Coordenadas	X_1	X_2
A	0	0
B	10	0
C	15	3
D	5	5

Sabe-se que, após a transformação, o ponto D deve ter a coordenada fixada em (-16,00; 60,00). Os demais pontos tiveram suas coordenadas observadas segundo a tabela abaixo.

Ponto	Y_1	Y_2
A	11,30	9,30
B	34,70	84,50
C	23,00	133,60



Ajustamento: Método Paramétrico

1) Modelo Matemático

$$\begin{cases} y_{1_A} = ax_{1_A} - bx_{2_A} + c \\ y_{2_A} = bx_{1_A} + ax_{2_A} + d \\ y_{1_B} = ax_{1_B} - bx_{2_B} + c \\ y_{2_B} = bx_{1_B} + ax_{2_B} + d \\ y_{1_C} = ax_{1_C} - bx_{2_C} + c \\ y_{2_C} = bx_{1_C} + ax_{2_C} + d \end{cases}$$

Ajustamento: Método Paramétrico

2) Modelo Matemático das Injunções

$$G(X_a) = 0$$

$$\begin{cases} ax_{1_D} - bx_{2_D} + c - y_{1_D} = 0 \\ bx_{1_D} + ax_{2_D} + d - y_{2_D} = 0 \end{cases}$$

7

Ajustamento: Método Paramétrico

3) Matriz L_b

8

Ajustamento: Método Paramétrico

$$X_0 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

9

Ajustamento: Método Paramétrico

4) Cálculo da matriz A

Ajustamento: Método Paramétrico

5) Cálculo da matriz C

6) Cálculo da matriz W' = ε_C

Ajustamento: Método Paramétrico

7) Cálculo da matriz N, U, N_c, U_c

$N = A^T PA$

$U = A^T PL$

$N_C = C^T P_C C$

$U_C = C^T P_C \varepsilon_C$

Ajustamento: Método Paramétrico

8) Cálculo de Xa

$$X = -(N + N_C)^{-1}(U + U_C)$$

$$X_a = X_0 + X$$

13

Ajustamento: Método Paramétrico

No FreeMat...

14

Ajustamento: Método Paramétrico

No FreeMat...

15

Ajustamento: Método Paramétrico com Injunções

Injunção ≡ restrição imposta a parâmetros

$$X = -(N + N_C)^{-1}(U + U_C)$$

$$\begin{cases} N = A^T PA \\ U = A^T PL \end{cases} \qquad L = L_0 - L_b$$

$$\begin{cases} N_C = C^T P_C C \\ U_C = C^T P_C \varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} G(X_a) = 0 \\ \varepsilon = Valor_{Calculado} - Valor_{Observado} \end{cases}$$

16

Ajustamento: Método Paramétrico com Injunções

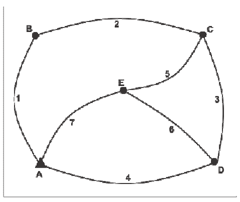
Os ângulos internos de um triângulo foram observados:

A	40º
B	60º
C	78º

17

Ajustamento: Método Paramétrico com Injunções

Rede de nivelamento geométrico: ajustamento com injunção



Linha	Desnível (m)	Extensão (km)
1: A→B	25,15	7
2: B→C	-10,57	5
3: C→D	-1,76	3
4: D→A	-12,65	8
5: C→E	-7,06	3
6: E→D	5,37	5
7: E→A	-7,47	5

$$H_A = 1300{,}62m$$

$$\Delta_{H_{EB}} = H_B - H_E = 17{,}60m$$

18

Ajustamento: Método paramétrico com injunção

$$X = -(N + N_C)^{-1}(U + U_C)$$

$$\begin{cases} N = A^T PA \\ U = A^T PL \end{cases} \qquad L = L_0 - L_b$$

$$\begin{cases} N_C = C^T P_C C \\ U_C = C^T P_C \varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} G(X_a) = 0 \\ \varepsilon = Valor_{Calculado} - Valor_{Observado} \end{cases}$$

19

Ajustamento: Método Paramétrico

a) Modelo matemático funcional

b) Equações de injunção

20

Ajustamento: Método Paramétrico

c) Matriz Lb

d) Matriz de Pesos P

e) Matriz Xo

f) Matriz Lo

21

Ajustamento: Método Paramétrico

g) Matriz A

h) Matriz C

i) Matriz Peso das injunções Pc

j) Matriz Erro de fechamento

22

Ajustamento: Método Paramétrico

k) Matriz N

l) Matriz U

m) Matriz Nc

n) Matriz Uc

23

Ajustamento: Método Paramétrico

o) Vetor das correções X

p) Vetor de Resíduos V

q) Variância a posteriori

24

Ajustamento: Método Paramétrico

No FreeMat...

Ajustamento Paramétrico com Injunções

Ajustamento: Método Combinado com Injunções

Seja o modelo matemático $F(L_a, X_a) = 0$ envolvendo parâmetros e incógnitas.

Sejam as injunções $G(X_a) = 0$

Este ajustamento pode ser resolvido em duas etapas:

a) Solução pelo método combinado sem considerar a injunção (X_*)
b) Cálculo da influência da injunção (δX)

$$X = X_* + \delta X$$

Ajustamento: Método Combinado com Injunções

As equações de injunção $G(X_a) = 0$

podem ser linearizadas

$$G(X_a) = G(X_0 + X) \approx G(X_0) + \left.\frac{\partial G}{\partial X_a}\right|_{X_0} (X_a - X_0) = 0$$

ou $CX + W' = 0$ onde $W' = G(X_0)$ e $C = \left.\frac{\partial G}{\partial X_a}\right|_{X_0}$

Então

$$\begin{cases} F(L_a, X_a) = 0 \\ G(X_a) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AX + BV + W = 0 \\ CX + W' = 0 \end{cases}$$

28

Ajustamento: Método Combinado com Injunções

Equações Normais

$$\phi = V^T PV - 2K^T (AX + BV + W) - 2K'^T (CX + W') = mínimo$$

As derivadas parciais em relação a V, K, X e K', igualadas a zero, resultam nas seguintes equações matriciais:

$$\frac{\partial \phi}{\partial V} = PV - B^T K = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial K} = -(AX + BV + W) = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial X} = -A^T K - C^T K' = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial K'} = -(CX + W') = 0$$

29

Ajustamento: Método Combinado com Injunções

As equações anteriores podem ser reunidas:

$$\begin{bmatrix} {}_nP_n & -{}_nB_r^T & {}_n0_u & {}_n0_s \\ {}_rB_n & {}_r0_r & {}_rA_u & {}_r0_s \\ {}_u0_n & {}_uA_r^T & {}_u0_u & {}_uC_s^T \\ {}_s0_n & {}_s0_r & {}_sC_u & {}_s0_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_nV_1 \\ {}_rK_1 \\ {}_uX_1 \\ {}_sK'_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}_n0_1 \\ {}_rW_1 \\ {}_u0_1 \\ {}_sW'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Segue-se que:

$$X_* = -(A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} W$$

$$K' = (C(A^T M^{-1} A)^{-1} C^T)^{-1} (-CX_* - W')$$

e

$$\delta X = (A^T M^{-1} A)^{-1} C^T K'$$

com

$$X_a = X_0 + X_* + \delta X$$

30

Ajustamento: Método Combinado com Injunções

Matriz Variância-Covariância dos Parâmetros

Demonstra-se que:

$$\Sigma_X = \Sigma_{X_*} - \Sigma_{X_*} C^T (C \Sigma_{X_*} C^T)^{-1} C \Sigma_{X_*}$$

onde

$$\Sigma_{X_*} = \hat{\sigma}_0^2 (A^T M^{-1} A)^{-1}$$

31

Ajustamento: Método Combinado com Injunções

Dadas as coordenadas observadas de quatro pontos, estimar as coordenadas do centro e o raio da circunferência que melhor se ajusta aos mesmos. A circunferência deve passar pelo ponto (100,0; 50,0)

Pontos	x	σ_x^2	y	σ_y^2
1	140,0	0,5	60,0	0,5
2	165,0	1,0	100,0	1,0
3	165,0	0,5	150,0	0,5
4	140,0	1,0	180,0	1,0

a) Modelo matemático

Sejam

x_a, y_a ➔ coordenadas do centro ajustadas

r_a ➔ raio ajustado

$x_i^{(a)}, y_i^{(a)}$ ➔ valores observados ajustados

n = 8 observações
r = 4 equações
u = 3 parâmetros

$$f_i = (x_i^{(a)} - x_a)^2 + (y_i^{(a)} - y_a)^2 - r_a^2 = 0$$

i = 1,2,3,4

32

Ajustamento: Método Combinado com Injunções

b) Modelo linearizado
AX + BV + W = 0

c) Vetor Solução Inicial

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_o \\ y_0 \\ r_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 120 \\ 70 \end{bmatrix}$$

d) Vetor dos valores observados

33

Ajustamento: Método Combinado com Injunções

e) Matriz dos Pesos P

$$P = \left(\Sigma_{L_b}\right)^{-1}$$

Ajustamento: Método Combinado com Injunções

f) Vetor Erro de Fechamento

$$W = F(L_b, X_0)$$

g) Matriz B

$$B = \left.\frac{\partial F}{\partial L_a}\right|_{L_b}$$

8 observações

4 equações

$$B = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

Ajustamento: Método Combinado com Injunções

g) Matriz B

Ajustamento: Método Combinado com Injunções

h) Matriz A $A = \left.\frac{\partial F}{\partial X_a}\right|_{X_0}$

37

Ajustamento: Método Combinado com Injunções

i) Cálculo da Matriz M $M = BP^{-1}B^T$

j) Cálculo do Vetor de Correções X

$$X_* = -(A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} W$$

38

Ajustamento: Método Combinado com Injunções

k) Injunção $G(X_a) = 0$

l) Cálculo de C e W'

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial G}{\partial x_a} & \frac{\partial G}{\partial y_a} & \frac{\partial G}{\partial r_a} \end{bmatrix}$$

39

Ajustamento: Método Combinado com Injunções

m) Cálculo de K'

$$K' = (C(A^T M^{-1} A)^{-1} C^T)^{-1}(-CX_* - W')$$

n) Cálculo de δX

$$\delta X = (A^T M^{-1} A)^{-1} C^T K'$$

o) Cálculo de X_a

$$X_a = X_0 + X_* + \delta X$$

40

Ajustamento: Método Combinado com Injunções

41

Ajustamento: Método Combinado com Injunções

42

Ajustamento: Método Combinado com Injunções

43

Ajustamento: Método Combinado

Dados dois sistemas de coordenadas x = $[x_1, x_2]^T$, y = $[y_1, y_2]^T$, e três pontos com coordenadas observadas nos dois sistemas:

Ponto	x_1	x_2	y_1	y_2
1	576,889	286,144	738,284	372,541
2	598,213	449,326	745,184	561,693
3	608,554	597,625	741,096	732,570

A transformação entre os dois sistemas é

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$$

onde s é um fator de escala, e a, b, c, d, t_1, t_2 são seis parâmetros.

Estime por MMQ os parâmetros acima, aplicando injunções tais que a transformação considerada seja com efeito a transformação linear conforme de quatro parâmetros dada por

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

Faça o ajustamento também com esta última transformação para confirmar que os resultados são os mesmos.

44

Ressecção

Ressecção

Ressecção – Método paramétrico

Uma imagem com POE aproximado

$$(X_0, Y_0, Z_0, \omega, \varphi, \kappa) = (2400\text{m}, 4200\text{m}, 2800\text{m}, 0^\circ, 0^\circ, 50^\circ)$$

foi tomada com uma câmara calibrada com POI $(x_0; y_0; f) = (0\text{mm}; 0\text{mm}; 153{,}010\text{mm})$ A partir da observação de fotocoordenadas (x,y), e de coordenadas geodésicas locais (X,Y,Z) de sete pontos, conforme tabela abaixo, calcule os parâmetros de orientação exterior ajustados. Considere (x,y) como observações e (X,Y,Z) como valores fixos isentos de erros. $\sigma_x = \sigma_y = 0{,}060mm$

Ponto	Fotocoordenadas (em mm)		Coordenadas Geodésicas Locais (em m)		
	x	y	X	Y	Z
1	47,928	-59,052	3623,257	4534,843	920,377
2	-36,111	18,735	2114,348	4019,066	903,150
3	-0,160	-27,796	2900,344	4146,670	905,163
4	-88,145	-89,769	3068,235	2718,539	911,689
5	46,009	-17,784	3088,540	4780,286	918,328
6	113,263	-105,970	4739,023	5071,418	935,349
7	-37,020	12,834	2177,928	3970,897	915,438

Ressecção – Método paramétrico

1) Modelo funcional: $L_a = F(X_a)$ ➔ Paramétrico

$$\begin{cases} x = -f\dfrac{m_{11}(X-X_0)+m_{12}(Y-Y_0)+m_{13}(Z-Z_0)}{m_{31}(X-X_0)+m_{32}(Y-Y_0)+m_{33}(Z-Z_0)} = -f\dfrac{Q_X}{Q_Z} \\ y = -f\dfrac{m_{21}(X-X_0)+m_{22}(Y-Y_0)+m_{23}(Z-Z_0)}{m_{31}(X-X_0)+m_{32}(Y-Y_0)+m_{33}(Z-Z_0)} = -f\dfrac{Q_Y}{Q_Z} \end{cases}$$

$$M_{\kappa\varphi\omega} = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\kappa & \cos\omega\sin\kappa + \sin\omega\sin\varphi\cos\kappa & \sin\omega\sin\kappa - \cos\omega\sin\varphi\cos\kappa \\ -\cos\varphi\sin\kappa & \cos\omega\cos\kappa - \sin\omega\sin\varphi\sin\kappa & \sin\omega\cos\kappa + \cos\omega\sin\varphi\sin\kappa \\ \sin\varphi & -\sin\omega\cos\varphi & \cos\omega\cos\varphi \end{bmatrix}$$

Ressecção – Método paramétrico

Derivadas para matriz Jacobiana

$$\frac{\partial Fx}{\partial X_0} = -f\frac{(Q_Z)(-m_{11})-(Q_X)(-m_{31})}{(Q_Z)^2}$$

$$\frac{\partial Fx}{\partial Y_0} = -f\frac{(Q_Z)(-m_{12})-(Q_X)(-m_{32})}{(Q_Z)^2}$$

$$\frac{\partial Fx}{\partial Z_0} = -f\frac{(Q_Z)(-m_{13})-(Q_X)(-m_{33})}{(Q_Z)^2}$$

$$\frac{\partial Fx}{\partial \omega} = -f\frac{(Q_Z)((Y-Y_0)(-m_{13})+(Z-Z_0)(m_{12}))-(Q_X)((Y-Y_0)(-m_{33})+(Z-Z_0)(m_{32}))}{(Q_Z)^2}$$

$$\frac{\partial Fx}{\partial \varphi} = -f\frac{Q_Z((X-X_0)(-\sin\varphi\cos\kappa)+(Y-Y_0)(\sin\omega\cos\varphi\cos\kappa)+(Z-Z_0)(-\cos\omega\cos\varphi\cos\kappa))}{(Q_Z)^2}$$
$$+ f\frac{Q_X((X-X_0)(\cos\varphi)+(Y-Y_0)(\sin\omega\sin\varphi)+(Z-Z_0)(-\cos\omega\sin\varphi))}{(Q_Z)^2}$$

$$\frac{\partial Fx}{\partial \kappa} = -f\frac{(Q_Z)((X-X_0)(-\cos\varphi\sin\kappa)+(Y-Y_0)(m_{22})+(Z-Z_0)(m_{23}))}{(Q_Z)^2}$$

48

Ressecção – Método paramétrico

Derivadas para matriz Jacobiana

$$\frac{\partial Fy}{\partial X_0} = -f\,\frac{(Q_Z)(-m_{21})-(Q_Y)(-m_{31})}{(Q_Z)^2}$$

$$\frac{\partial Fy}{\partial Y_0} = -f\,\frac{(Q_Z)(-m_{22})-(Q_Y)(-m_{32})}{(Q_Z)^2}$$

$$\frac{\partial Fy}{\partial Z_0} = -f\,\frac{(Q_Z)(-m_{23})-(Q_Y)(-m_{33})}{(Q_Z)^2}$$

$$\frac{\partial Fy}{\partial \omega} = -f\,\frac{(Q_Z)((Y-Y_0)(-m_{23})+(Z-Z_0)(m_{22}))-(Q_Y)((Y-Y_0)(-m_{33})+(Z-Z_0)(m_{32}))}{(Q_Z)^2}$$

$$\frac{\partial Fy}{\partial \varphi} = -f\,\frac{Q_Z((X-X_0)(\sin\varphi\sin\kappa)+(Y-Y_0)(-\sin\omega\cos\varphi\sin\kappa)+(Z-Z_0)(\cos\omega\cos\varphi\sin\kappa))}{(Q_Z)^2} + f\,\frac{Q_Y((X-X_0)(\cos\varphi)+(Y-Y_0)(\sin\omega\sin\varphi)+(Z-Z_0)(-\cos\omega\sin\varphi))}{(Q_Z)^2}$$

$$\frac{\partial Fy}{\partial \kappa} = -f\,\frac{(Q_Z)((X-X_0)(-\cos\varphi\cos\kappa)+(Y-Y_0)(-m_{12})+(Z-Z_0)(-m_{13}))}{(Q_Z)^2}$$

49

Ressecção – Método paramétrico

2) Vetor das observações Lb

3) Vetor correção dos parâmetros Xo

$$X_0 = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \\ \omega \\ \varphi \\ \kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2400 \\ 4200 \\ 2800 \\ 0 \\ 0 \\ 50*pi/180 \end{bmatrix}$$

50

Ressecção – Método paramétrico

4) Matriz A

$$A = \begin{bmatrix}
\partial Fx_1/\partial X_0 & \partial Fx_1/\partial Y_0 & \partial Fx_1/\partial Z_0 & \partial Fx_1/\partial\omega & \partial Fx_1/\partial\varphi & \partial Fx_1/\partial\kappa \\
\partial Fy_1/\partial X_0 & \partial Fy_1/\partial Y_0 & \partial Fy_1/\partial Z_0 & \partial Fy_1/\partial\omega & \partial Fy_1/\partial\varphi & \partial Fy_1/\partial\kappa \\
\partial Fx_2/\partial X_0 & \partial Fx_2/\partial Y_0 & \partial Fx_2/\partial Z_0 & \partial Fx_2/\partial\omega & \partial Fx_2/\partial\varphi & \partial Fx_2/\partial\kappa \\
\partial Fy_2/\partial X_0 & \partial Fy_2/\partial Y_0 & \partial Fy_2/\partial Z_0 & \partial Fy_2/\partial\omega & \partial Fy_2/\partial\varphi & \partial Fy_2/\partial\kappa \\
\partial Fx_3/\partial X_0 & \partial Fx_3/\partial Y_0 & \partial Fx_3/\partial Z_0 & \partial Fx_3/\partial\omega & \partial Fx_3/\partial\varphi & \partial Fx_3/\partial\kappa \\
\partial Fy_3/\partial X_0 & \partial Fy_3/\partial Y_0 & \partial Fy_3/\partial Z_0 & \partial Fy_3/\partial\omega & \partial Fy_3/\partial\varphi & \partial Fy_3/\partial\kappa \\
\partial Fx_4/\partial X_0 & \partial Fx_4/\partial Y_0 & \partial Fx_4/\partial Z_0 & \partial Fx_4/\partial\omega & \partial Fx_4/\partial\varphi & \partial Fx_4/\partial\kappa \\
\partial Fy_4/\partial X_0 & \partial Fy_4/\partial Y_0 & \partial Fy_4/\partial Z_0 & \partial Fy_4/\partial\omega & \partial Fy_4/\partial\varphi & \partial Fy_4/\partial\kappa \\
\partial Fx_5/\partial X_0 & \partial Fx_5/\partial Y_0 & \partial Fx_5/\partial Z_0 & \partial Fx_5/\partial\omega & \partial Fx_5/\partial\varphi & \partial Fx_5/\partial\kappa \\
\partial Fy_5/\partial X_0 & \partial Fy_5/\partial Y_0 & \partial Fy_5/\partial Z_0 & \partial Fy_5/\partial\omega & \partial Fy_5/\partial\varphi & \partial Fy_5/\partial\kappa \\
\partial Fx_6/\partial X_0 & \partial Fx_6/\partial Y_0 & \partial Fx_6/\partial Z_0 & \partial Fx_6/\partial\omega & \partial Fx_6/\partial\varphi & \partial Fx_6/\partial\kappa \\
\partial Fy_6/\partial X_0 & \partial Fy_6/\partial Y_0 & \partial Fy_6/\partial Z_0 & \partial Fy_6/\partial\omega & \partial Fy_6/\partial\varphi & \partial Fy_6/\partial\kappa \\
\partial Fx_7/\partial X_0 & \partial Fx_7/\partial Y_0 & \partial Fx_7/\partial Z_0 & \partial Fx_7/\partial\omega & \partial Fx_7/\partial\varphi & \partial Fx_7/\partial\kappa \\
\partial Fy_7/\partial X_0 & \partial Fy_7/\partial Y_0 & \partial Fy_7/\partial Z_0 & \partial Fy_7/\partial\omega & \partial Fy_7/\partial\varphi & \partial Fy_7/\partial\kappa
\end{bmatrix}_{X=X_0}$$

51

Ressecção – Método paramétrico

5) Matriz Xa (após 4 iterações)

52

Ressecção – Método paramétrico

6) Matriz V)

7) Variância a posteriori

53

Ressecção – Método paramétrico

8) MVC de Xa

54

Ressecção – Método paramétrico

9) Resultado Final

$$X_a = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \\ \omega \\ \varphi \\ \kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2406{,}330 \pm 2{,}3884 \\ 4231{,}054 \pm 2{,}1935 \\ 2990{,}735 \pm 1{,}7728 \\ 2{,}664^o \pm 0{,}0557^o \\ -4{,}313^o \pm 0{,}0649^o \\ 62{,}036^o \pm 0{,}0189^o \end{bmatrix}$$

55

Ressecção – Método paramétrico

No FreeMat...

56

Ressecção – Método paramétrico

No FreeMat...

57

Ressecção – Método paramétrico

No FreeMat...

58

Ressecção – Método paramétrico

No FreeMat...

59

Ressecção – Método paramétrico

No FreeMat...

60

Ressecção – Método paramétrico

No FreeMat...

Ressecção – Método paramétrico com injunções

Uma imagem com POE aproximado

$$(X_0, Y_0, Z_0, \omega, \varphi, \kappa) = (2400\text{m}, 4200\text{m}, 2800\text{m}, 0^o, 0^o, 50^o)$$

foi tomada com uma câmara calibrada com POI $(x_0; y_0; f) = (0\text{mm}; 0\text{mm}; 153{,}010\text{mm})$
A partir da observação de fotocoordenadas (x,y), e de coordenadas geodésicas locais (X,Y,Z) de sete pontos, conforme tabela abaixo, calcule os parâmetros de orientação exterior ajustados. Considere (x,y) como observações e coloque (X,Y,Z) como injunções, no método paramétrico, com desvio padrão de 0,5m.

$$\sigma_x = \sigma_y = 0{,}015mm$$

Ponto	Fotocoordenadas (em mm)		Coordenadas Geodésicas Locais (em m)		
	x	y	X	Y	Z
1	47,928	-59,052	3623,257	4534,843	920,377
2	-36,111	18,735	2114,348	4019,066	903,150
3	-0,160	-27,796	2900,344	4146,670	905,163
4	-88,145	-89,769	3068,235	2718,539	911,689
5	46,009	-17,784	3088,540	4780,286	918,328
6	113,263	-105,970	4739,023	5071,418	935,349
7	-37,020	12,834	2177,928	3970,897	915,438

Ressecção – Método paramétrico com injunções

1) Modelo funcional: $\begin{cases} L_a = F(X_a) \\ G(Xa) = 0 \end{cases}$ ➔ Paramétrico com injunção

$$\begin{cases} x = -f \dfrac{m_{11}(X - X_0) + m_{12}(Y - Y_0) + m_{13}(Z - Z_0)}{m_{31}(X - X_0) + m_{32}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)} = -f \dfrac{Q_X}{Q_Z} \\ y = -f \dfrac{m_{21}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{23}(Z - Z_0)}{m_{31}(X - X_0) + m_{32}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)} = -f \dfrac{Q_Y}{Q_Z} \end{cases}$$

$$M_{\kappa\varphi\omega} = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\kappa & \cos\omega\sin\kappa + \sin\omega\sin\varphi\cos\kappa & \sin\omega\sin\kappa - \cos\omega\sin\varphi\cos\kappa \\ -\cos\varphi\sin\kappa & \cos\omega\cos\kappa - \sin\omega\sin\varphi\sin\kappa & \sin\omega\cos\kappa + \cos\omega\sin\varphi\sin\kappa \\ \sin\varphi & -\sin\omega\cos\varphi & \cos\omega\cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} X_{calc} - X_{obsv} = 0 \\ Y_{calc} - Y_{obsv} = 0 \\ Z_{calc} - Z_{obsv} = 0 \end{cases}$$

Ressecção – Método paramétrico com injunções

$$X = -(N + N_C)^{-1}(U + U_C)$$

$$\begin{cases} N = A^T P A \\ U = A^T P L \end{cases} \qquad L = L_0 - L_b$$

$$\begin{cases} N_C = C^T P_C C \\ U_C = C^T P_C \varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} G(X_a) = 0 \\ \varepsilon = Valor_{Calculado} - Valor_{Observado} \end{cases}$$

64

Ressecção – Método paramétrico com injunções

Derivadas para matriz Jacobiana

$$\frac{\partial Fx}{\partial X_0} = -f\,\frac{(Q_Z)(-m_{11}) - (Q_X)(-m_{31})}{(Q_Z)^2}$$

$$\frac{\partial Fx}{\partial Y_0} = -f\,\frac{(Q_Z)(-m_{12}) - (Q_X)(-m_{32})}{(Q_Z)^2}$$

$$\frac{\partial Fx}{\partial Z_0} = -f\,\frac{(Q_Z)(-m_{13}) - (Q_X)(-m_{33})}{(Q_Z)^2}$$

$$\frac{\partial Fx}{\partial \omega} = -f\,\frac{(Q_Z)((Y - Y_0)(-m_{13}) + (Z - Z_0)(m_{12})) - (Q_X)((Y - Y_0)(-m_{33}) + (Z - Z_0)(m_{32}))}{(Q_Z)^2}$$

$$\frac{\partial Fx}{\partial \varphi} = -f\,\frac{Q_Z((X - X_0)(-\sin\varphi\cos\kappa) + (Y - Y_0)(\sin\omega\cos\varphi\cos\kappa) + (Z - Z_0)(-\cos\omega\cos\varphi\cos\kappa))}{(Q_Z)^2} + f\,\frac{Q_X((X - X_0)(\cos\varphi) + (Y - Y_0)(\sin\omega\sin\varphi) + (Z - Z_0)(-\cos\omega\sin\varphi))}{(Q_Z)^2}$$

$$\frac{\partial Fx}{\partial \kappa} = -f\,\frac{(Q_Z)((X - X_0)(-\cos\varphi\sin\kappa) + (Y - Y_0)(m_{22}) + (Z - Z_0)(m_{23}))}{(Q_Z)^2}$$

65

Ressecção – Método paramétrico com injunções

Derivadas para matriz Jacobiana

$$\frac{\partial Fy}{\partial X_0} = -f\,\frac{(Q_Z)(-m_{21}) - (Q_Y)(-m_{31})}{(Q_Z)^2}$$

$$\frac{\partial Fy}{\partial Y_0} = -f\,\frac{(Q_Z)(-m_{22}) - (Q_Y)(-m_{32})}{(Q_Z)^2}$$

$$\frac{\partial Fy}{\partial Z_0} = -f\,\frac{(Q_Z)(-m_{23}) - (Q_Y)(-m_{33})}{(Q_Z)^2}$$

$$\frac{\partial Fy}{\partial \omega} = -f\,\frac{(Q_Z)((Y - Y_0)(-m_{23}) + (Z - Z_0)(m_{22})) - (Q_Y)((Y - Y_0)(-m_{33}) + (Z - Z_0)(m_{32}))}{(Q_Z)^2}$$

$$\frac{\partial Fy}{\partial \varphi} = -f\,\frac{Q_Z((X - X_0)(\sin\varphi\sin\kappa) + (Y - Y_0)(-\sin\omega\cos\varphi\sin\kappa) + (Z - Z_0)(\cos\omega\cos\varphi\sin\kappa))}{(Q_Z)^2} + f\,\frac{Q_Y((X - X_0)(\cos\varphi) + (Y - Y_0)(\sin\omega\sin\varphi) + (Z - Z_0)(-\cos\omega\sin\varphi))}{(Q_Z)^2}$$

$$\frac{\partial Fy}{\partial \kappa} = -f\,\frac{(Q_Z)((X - X_0)(-\cos\varphi\cos\kappa) + (Y - Y_0)(-m_{12}) + (Z - Z_0)(-m_{13}))}{(Q_Z)^2}$$

66

Ressecção – Método paramétrico com injunções

2) Vetor das observações Lb

67

Ressecção – Método paramétrico com injunções

3) Vetor dos Pesos P

4) Vetor dos Pesos das injunções Pc

68

Ressecção – Método paramétrico com injunções

5) Vetor Solução Inicial Xo

$$X_0 = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \\ \omega \\ \varphi \\ \kappa \\ X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \\ \vdots \\ X_7 \\ Y_7 \\ Z_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2400 \\ 4200 \\ 2800 \\ 0 \\ 0 \\ 50 * pi/180 \\ 3623{,}257 \\ 4534{,}843 \\ 920{,}377 \\ \vdots \\ 2177{,}928 \\ 3970{,}897 \\ 915{,}438 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ X_{1\,calculado} \\ Y_{1\,\mathrm{calculado}} \\ Z_{1\,\mathrm{calculado}} \\ \\ X_{7\,\mathrm{calculado}} \\ Y_{7\,\mathrm{calculado}} \\ Z_{7\,\mathrm{calculado}} \end{matrix}$$

69

Ressecção – Método paramétrico com injunções

6) Matriz A

$$
A = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ y_6 \\ x_7 \\ y_7 \end{array}
\overset{\begin{array}{ccccccccccccc} X_0 & Y_0 & Z_0 & \omega & \varphi & \kappa & X_1 & Y_1 & Z_1 & & X_7 & Y_7 & Z_7 \end{array}}{
\begin{bmatrix}
\frac{\partial Fx_1}{\partial X_0} & \frac{\partial Fx_1}{\partial Y_0} & \frac{\partial Fx_1}{\partial Z_0} & \frac{\partial Fx_1}{\partial \omega} & \frac{\partial Fx_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial Fx_1}{\partial \kappa} & \frac{\partial Fx_1}{\partial X_1} & \frac{\partial Fx_1}{\partial Y_1} & \frac{\partial Fx_1}{\partial Z_1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\partial Fy_1}{\partial X_0} & \frac{\partial Fy_1}{\partial Y_0} & \frac{\partial Fy_1}{\partial Z_0} & \frac{\partial Fy_1}{\partial \omega} & \frac{\partial Fy_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial Fy_1}{\partial \kappa} & \frac{\partial Fy_1}{\partial X_1} & \frac{\partial Fy_1}{\partial Y_1} & \frac{\partial Fy_1}{\partial Z_1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\partial Fx_2}{\partial X_0} & \frac{\partial Fx_2}{\partial Y_0} & \frac{\partial Fx_2}{\partial Z_0} & \frac{\partial Fx_2}{\partial \omega} & \frac{\partial Fx_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial Fx_2}{\partial \kappa} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{\partial Fy_6}{\partial X_0} & \frac{\partial Fy_6}{\partial Y_0} & \frac{\partial Fy_6}{\partial Z_0} & \frac{\partial Fy_6}{\partial \omega} & \frac{\partial Fy_6}{\partial \varphi} & \frac{\partial Fy_6}{\partial \kappa} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\partial Fx_7}{\partial X_0} & \frac{\partial Fx_7}{\partial Y_0} & \frac{\partial Fx_7}{\partial Z_0} & \frac{\partial Fx_7}{\partial \omega} & \frac{\partial Fx_7}{\partial \varphi} & \frac{\partial Fx_7}{\partial \kappa} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\partial Fx_7}{\partial X_7} & \frac{\partial Fx_7}{\partial Y_7} & \frac{\partial Fx_7}{\partial Z_7} \\
\frac{\partial Fy_7}{\partial X_0} & \frac{\partial Fy_7}{\partial Y_0} & \frac{\partial Fy_7}{\partial Z_0} & \frac{\partial Fy_7}{\partial \omega} & \frac{\partial Fy_7}{\partial \varphi} & \frac{\partial Fy_7}{\partial \kappa} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\partial Fy_7}{\partial X_7} & \frac{\partial Fy_7}{\partial Y_7} & \frac{\partial Fy_7}{\partial Z_7}
\end{bmatrix}_{X=X_0}}
$$

Ressecção – Método paramétrico com injunções

7) Matriz C: Derivada das injunções

$$
C = \begin{array}{c} \\ X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \\ \vdots \\ X_7 \\ Y_7 \\ Z_7 \end{array}
\overset{\begin{array}{ccccccccccccc} X_0 & Y_0 & Z_0 & \omega & \varphi & \kappa & X_1 & Y_1 & Z_1 & & X_7 & Y_7 & Z_7 \end{array}}{
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}_{X=X_0}}
$$

Ressecção – Método paramétrico com injunções

8) Matriz Erro de fechamento

$$
\begin{array}{c} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \\ \\ X_7 \\ Y_7 \\ Z_7 \end{array}
\quad
\varepsilon = \begin{bmatrix}
X_{1_{calc}} - X_{1_{obsv}} \\
Y_{1_{calc}} - Y_{1_{obsv}} \\
Z_{1_{calc}} - Z_{1_{obsv}} \\
\vdots \\
X_{7_{calc}} - X_{7_{obsv}} \\
Y_{7_{calc}} - Y_{7_{obsv}} \\
Z_{7_{calc}} - Z_{7_{obsv}}
\end{bmatrix}_{X=X_0}
= \begin{bmatrix}
X_{1_{calc}} - 3623{,}257 \\
Y_{1_{calc}} - 4534{,}843 \\
Z_{1_{calc}} - 920{,}377 \\
\vdots \\
X_{7_{calc}} - 2177{,}928 \\
Y_{7_{calc}} - 3970{,}897 \\
Z_{7_{calc}} - 915{,}438
\end{bmatrix}
$$

Ressecção – Método paramétrico com injunções

9) Matriz Xa

73

Ressecção – Método paramétrico com injunções

10) Matriz V

11) Variância a posteriori

74

Ressecção – Método paramétrico com injunções

12) MVC de Xa ➔ precisão de Xa

$$\Sigma_{X_a} = \hat{\sigma}_0^2 (N + N_C)^{-1}$$

75

Ressecção – Método paramétrico com injunções

No FreeMat...

76

Ressecção – Método paramétrico com injunções

No FreeMat...

77

Ressecção – Método paramétrico com injunções

No FreeMat...

78

Ressecção – Método paramétrico com injunções

No FreeMat...

79

Ressecção – Método paramétrico com injunções

No FreeMat...

80

Ressecção – Método paramétrico com injunções

No FreeMat...

81

Ressecção – Método paramétrico com injunções

No FreeMat...

Ressecção – Método paramétrico com injunções

No FreeMat...

Ressecção – Método combinado

Uma imagem com POE aproximado

$$(X_0, Y_0, Z_0, \omega, \varphi, \kappa) = (2400\text{m}, 4200\text{m}, 2800\text{m}, 0^o, 0^o, 50^o)$$

foi tomada com uma câmara calibrada com POI $(x_0; y_0; f) = (0\text{mm}; 0\text{mm}; 153{,}010\text{mm})$ A partir da observação de fotocoordenadas (x,y), e de coordenadas geodésicas locais (X,Y,Z) de sete pontos, conforme tabela abaixo, calcule os parâmetros de orientação exterior ajustados. Considere (x,y) como observações e coloque (X,Y,Z) como injunções, no método paramétrico, com desvio padrão de 0,5m.

$$\sigma_x = \sigma_y = 0{,}015mm$$

Ponto	Fotocoordenadas (em mm)		Coordenadas Geodésicas Locais (em m)		
	x	y	X	Y	Z
1	47,928	-59,052	3623,257	4534,843	920,377
2	-36,111	18,735	2114,348	4019,066	903,150
3	-0,160	-27,796	2900,344	4146,670	905,163
4	-88,145	-89,769	3068,235	2718,539	911,689
5	46,009	-17,784	3088,540	4780,286	918,328
6	113,263	-105,970	4739,023	5071,418	935,349
7	-37,020	12,834	2177,928	3970,897	915,438

Ressecção – Método combinado

1) Modelo matemático

$$\begin{cases} x = -f \dfrac{m_{11}(X - X_0) + m_{12}(Y - Y_0) + m_{13}(Z - Z_0)}{m_{31}(X - X_0) + m_{32}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)} = -f \dfrac{Q_X}{Q_Z} \\ y = -f \dfrac{m_{21}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{23}(Z - Z_0)}{m_{31}(X - X_0) + m_{32}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)} = -f \dfrac{Q_Y}{Q_Z} \end{cases}$$

$$M_{\kappa\varphi\omega} = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\kappa & \cos\omega\sin\kappa + \sin\omega\sin\varphi\cos\kappa & \sin\omega\sin\kappa - \cos\omega\sin\varphi\cos\kappa \\ -\cos\varphi\sin\kappa & \cos\omega\cos\kappa - \sin\omega\sin\varphi\sin\kappa & \sin\omega\cos\kappa + \cos\omega\sin\varphi\sin\kappa \\ \sin\varphi & -\sin\omega\cos\varphi & \cos\omega\cos\varphi \end{bmatrix}$$

Ajustamento pelo Método combinado ➔ $f(L_a, X_a) = 0$

Observações =	n =	(2+3)*7 = 35
Equações =	r =	2*7 = 14
Parâmetros =	u =	6
Graus de liberdade =		14-6 = 8

$$\begin{cases} xQ_Z + fQ_X = 0 \\ yQ_Z + fQ_Y = 0 \end{cases}$$

Ressecção – Método combinado

Derivadas para matriz Jacobiana A

$$\frac{\partial Fx}{\partial X_0} = -x * m_{31} - f * m_{11} \qquad \frac{\partial Fx}{\partial Y_0} = -x * m_{32} - f * m_{12} \qquad \frac{\partial Fx}{\partial Z_0} = -x * m_{33} - f * m_{13}$$

$$\frac{\partial Fx}{\partial \omega} = x(-m_{33}(Y - Y_0) + m_{32}(Z - Z_0)) + f(-m_{13}(Y - Y_0) + m_{12}(Z - Z_0))$$

$$\frac{\partial Fx}{\partial \varphi} = x(\cos\varphi(X - X_0) + \sin\omega\sin\varphi(Y - Y_0) - \cos\omega\sin\varphi(Z - Z_0)) +$$
$$+ f(-\sin\varphi\cos\kappa(X - X_0) + \sin\omega\cos\varphi\cos\kappa(Y - Y_0) - \cos\omega\cos\varphi\cos\kappa(Z - Z_0))$$

$$\frac{\partial Fx}{\partial \kappa} = f(m_{21}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{23}(Z - Z_0))$$

86

Ressecção – Método combinado

Derivadas para matriz Jacobiana A

$$\frac{\partial Fy}{\partial X_0} = -y * m_{31} - f * m_{21} \qquad \frac{\partial Fy}{\partial Y_0} = -y * m_{32} - f * m_{22} \qquad \frac{\partial Fy}{\partial Z_0} = -y * m_{33} - f * m_{23}$$

$$\frac{\partial Fy}{\partial \omega} = y(-m_{33}(Y - Y_0) + m_{32}(Z - Z_0)) + f(-m_{23}(Y - Y_0) + m_{22}(Z - Z_0))$$

$$\frac{\partial Fy}{\partial \varphi} = y(\cos\varphi(X - X_0) + \sin\omega\sin\varphi(Y - Y_0) - \cos\omega\sin\varphi(Z - Z_0)) +$$
$$+ f(\sin\varphi\sin\kappa(X - X_0) - \sin\omega\cos\varphi\sin\kappa(Y - Y_0) + \cos\omega\cos\varphi\sin\kappa(Z - Z_0))$$

$$\frac{\partial Fy}{\partial \kappa} = f(-m_{11}(X - X_0) - m_{12}(Y - Y_0) - m_{13}(Z - Z_0))$$

87

Ressecção – Método combinado

Derivadas para matriz Jacobiana B

$$\frac{\partial Fx}{\partial x} = Q_Z \qquad \frac{\partial Fx}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial Fx}{\partial X} = x * m_{31} + fm_{11} \qquad \frac{\partial Fx}{\partial Y} = x * m_{32} + fm_{12} \qquad \frac{\partial Fx}{\partial Z} = x * m_{33} + fm_{13}$$

$$\frac{\partial Fy}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial Fy}{\partial y} = Q_Z$$

$$\frac{\partial Fy}{\partial X} = y * m_{31} + fm_{21} \qquad \frac{\partial Fy}{\partial Y} = y * m_{32} + fm_{22} \qquad \frac{\partial Fy}{\partial Z} = y * m_{33} + fm_{23}$$

88

Ressecção – Método combinado

$$L_{b_1} = \begin{bmatrix} 0,047928 \\ -0,059052 \\ 3623,257 \\ 4534,843 \\ 920,377 \end{bmatrix} \quad L_{b_2} = \begin{bmatrix} -0,036111 \\ 0,018735 \\ 2114,348 \\ 4019,066 \\ 903,150 \end{bmatrix} \quad L_{b_3} = \begin{bmatrix} -0,000160 \\ -0,027796 \\ 2900,344 \\ 4146,670 \\ 905,163 \end{bmatrix}$$

$$L_b = \begin{bmatrix} L_{b_1} \\ L_{b_2} \\ L_{b_3} \\ L_{b_4} \\ L_{b_5} \\ L_{b_6} \\ L_{b_7} \end{bmatrix} \quad L_{b_4} = \begin{bmatrix} -0,088145 \\ -0,089769 \\ 3068,235 \\ 2718,539 \\ 911,689 \end{bmatrix} \quad L_{b_5} = \begin{bmatrix} 0,046009 \\ -0,017784 \\ 3088,540 \\ 4780,286 \\ 918,328 \end{bmatrix} \quad L_{b_6} = \begin{bmatrix} 0,113263 \\ -0,105970 \\ 4739,023 \\ 5071,418 \\ 935,349 \end{bmatrix}$$

$$L_{b_7} = \begin{bmatrix} -0,037020 \\ 0,012834 \\ 2177,928 \\ 3970,897 \\ 915,438 \end{bmatrix}$$

89

Ressecção – Método combinado

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_7 \end{bmatrix}$$

$$P_i = \begin{bmatrix} 0,000015^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,000015^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5^2 \end{bmatrix}^{-1}$$

90

Ressecção – Método combinado

$$X_o = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \\ \omega \\ \varphi \\ \kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2400 \\ 4200 \\ 2800 \\ 0 \\ 0 \\ 50 * pi / 180 \end{bmatrix}$$

91

Ressecção – Método combinado

92

Sistemas de equações não lineares

Seja a equação seguinte, interligando um valor observado L com parâmetros desconhecidos x e y através de coeficientes não lineares:

$$L = f(x, y)$$

Desenvolvendo segundo o teorema de Taylor, tem-se:

$$L = f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{(\partial L / \partial x)_0}{1!} dx + \frac{(\partial^2 L / \partial x^2)_0}{2!} dx^2 + \ldots + \frac{(\partial^n L / \partial x^n)_0}{n!} dx^n$$

$$+ \frac{(\partial L / \partial y)_0}{1!} dy + \frac{(\partial^2 L / \partial y^2)_0}{2!} dy^2 + \ldots + \frac{(\partial^n L / \partial y^n)_0}{n!} dy^n + R$$

Nesta equação x_0 e y_0 são valores aproximados para x e y;
$f(x_0, y_0)$ representa a função não linear calculada com estes valores aproximados;
R representa a diferença restante;
dx e dy são correções aos valores aproximados, tais que $x = x_0 + dx$

$$y = y_0 + dy$$

$$L = f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)_0 dx + \left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)_0 dy$$

93

Sistemas de equações não lineares

$$L = f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)_0 dx + \left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)_0 dy$$

1) Linearize o seguinte par de equações não lineares e calcule o valor das incógnitas *x* e *y*:

$$\begin{cases} F: x + y - 2y^2 = -4 \\ G: x^2 + y^2 = 8 \end{cases}$$

$$JX = Q$$

$$(x_0, y_0) = (1,1)$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1-4y_0 \\ 2x_0 & 2y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} -4 - F(x_0,y_0) \\ 8 - G(x_0,y_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 - (x_0 + y_0 - 2y_0^2) \\ 8 - (x_0^2 + y_0^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}25 \\ 1{,}75 \end{bmatrix}$$

94

Sistemas de equações não lineares

No Freemat:

```
clear
clc
Xo = [1;1];
itera = -1;
fim = false;
while (~fim)
    itera = itera + 1;
    J = [1 1-4*Xo(2);2*Xo(1) 2*Xo(2)];
    Q = [-4-(Xo(1)+Xo(2)-2*Xo(2)^2);8-(Xo(1)^2+Xo(2)^2)];
    dxdy = inv(J)*Q
    Xo = Xo + dxdy;
    fim = (max(abs(dxdy)) < 1.0E-3) || (itera > 10);
end
Xo
```

95

Sistemas de equações não lineares

2) Linearize o seguinte par de equações não lineares e calcule o valor das incógnitas *x* e *y*:

$$\begin{cases} F: x^2 + 3xy - 4y^2 = 6 \\ G: x + xy - y^2 = 3 \end{cases}$$

Resp.: x = 2 e y = 1

2) Determine a equação da circunferência que passa por três pontos dados: (9,4; 5,6), (7,6; 7,2) e (3,8; 4,8)

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Resp.: x0 = 6,7154; y0 = 4,3923; r0 = 2,9438

96

Sistemas de equações não lineares

97